**پژوهش‌های فلسفی**
**نشریهٔ دانشکده ادبیات و**
**علوم انسانی دانشگاه تبریز**
**سال ۵۳، پاییز و زمستان ۸۹**
**شماره مسلسل ۲۱۹**

# در باب ریاضیات و واقعیت*

**دکتر حسن فتح‌زاده****
**E- Mail:** hfatzade@gmail.com

## چکیده

در این مقاله ضمن معرفی زمینه‌های متأخرِ تشدید دغدغهٔ تاریخی در باب رابطهٔ ریاضیات و واقعیت، با تقسیم دیدگاه‌های مختلف راجع به ضرورت و یقین گزاره‌های ریاضیاتی، تلاش شده است به این دغدغه پرتویی نو افکنده شود. کسانی که ریاضیات را غیریقینی و غیرضروری می‌شمرند رابطهٔ ریاضیات و واقعیت را مانند سایر علوم می‌دانند و بسته به این که چه دیدگاهی به علوم تجربی داشته باشند، در قلمرو ریاضیات نیز رئالیست یا آنتی‌رئالیست خواهند بود. مخالفین این دیدگاه را تحت دو عنوان ترکیبی‌گرایان و تحلیلی‌گرایان بررسی می‌کنیم، که ترکیبی‌گرایان نیز خود به دو گروه افلاطونی و کانتی تقسیم می‌شوند. نشان می‌دهیم که ترکیبی‌گرایان (اعم‌از افلاطونی‌ها و کانتی‌ها) گرچه به معنای خاص خودشان رئالیست‌اند، اما با رئالیسم به معنای رایج کلمه تفاوت ظریفی دارند. در مقابل، تحلیلی‌گرایان از همان آغاز آنتی‌رئالیست بودن‌شان آشکار است. در پایان اشاره‌ای هم خواهیم داشت به دفاع مبتنی بر کاربردپذیری، از رئالیسم در ریاضیات.

**واژه‌های کلیدی:** ریاضیات، واقعیت، ترکیبی، تحلیلی، کاربردپذیری، افلاطون، کانت.

* - تاریخ وصول: ۸۸/۸/۶، تایید نهایی: ۸۸/۸/۲۹
** - استادیار دانشگاه زنجان

**مقدمه**

> چگونه است که ریاضیات، که نتیجهٔ تفکر انسان و مستقل از تجربه است، می‌تواند به این تحسین‌برانگیزی راجع به اشیای واقعی باشد؟ آیا عقل بشر، بدون تجربه، و با اندیشهٔ صرف، قادر است به خواص اشیای واقعی پی برد؟
>
> **آلبرت اینشتاین**

یکی از پرسش‌های همیشگی در ریاضیات رابطهٔ اسرارآمیز ریاضیات و واقعیت بوده است. چگونه است که با تفکر محض در گوشه‌ای از اتاق می‌توان به گزاره‌هایی دست یافت که بر سرتاسر پهنهٔ گیتی حاکم‌اند؟ اگر ریاضیات مبتنی بر تجربه است، پس یقین و ضرورت آن از کجا می‌آید؟ و اگر مستقل از تجربه است ارتباط آن با طبیعت چه می‌شود؟ این ویژگی اسرارآمیز ریاضیات در طول تاریخ انگیزه‌ای بوده است تا فلاسفهٔ زیادی گمان کنند می‌توان با نشستن در گوشه‌ای و تأمل محض به معرفت ضروری و یقینی در مورد عالم دست یافت؛ و همین امر سرنوشت ریاضیات و فلسفه را البته به نفع فلسفه و دیدگاه‌های عقل‌گرایانه به هم گره زده بود.

در کنار این پرسش‌های همیشگی، از درون خود ریاضیات نیز، به‌ویژه در قرن بیستم، مسایلی رخ داد که در بسیاری از افراد آشنا با ریاضیات دغدغهٔ رابطهٔ ریاضیات و واقعیت را برانگیخت. در این‌جا دو نمونهٔ مهم را ذکر می‌کنیم: «پارادوکس‌های درون ریاضیات» و «جنبه‌های غیرشهودی ریاضیات». اولین مسأله مربوط است به کشف تعارضاتی در ریاضیات و مهم‌تر از همه پارادوکس راسل. برای درک اهمیت پارادوکس راسل می‌بایست بداهت و شهودی بودن تعریف فرگه از مجموعه را به خاطر آورد. تعریف فرگه که بنابر آن هر خاصیت مجموعه‌ای از اوبژه‌ها (مجموعهٔ مصادیق‌اش) را معین می‌کند، قبل از آن که با پارادوکس راسل مواجه شود تعریفی بود خوش‌ساخت و کاملاً شهودی. کواین روی همین مسأله تأکید می‌کند:

> مثلاً بحرانی را که در اوایل این قرن با کشف پارادوکس راسل و سایر تعارضات نظریهٔ مجموعه‌ها در مبانی ریاضیات پدید آمد در نظر بگیرید. از آن‌جا که این تناقضات بایستی با تدابیر غیرشهودی و موردی (ad hoc) [مثل بازتعریف «مجموعه»] برطرف می‌شد، اسطوره‌سازی ریاضیاتی ما حالت تعمدی [حساب‌گرانه] به خود گرفت و بر همه آشکار شد» (Quine, 1964, 18).

چنان‌که کواین اشاره می‌کند کشف این تعارضات وزنهٔ سنگینی بود که به کفهٔ صورت‌گرایی در ریاضیات اضافه شد. به‌ویژه این که قضیهٔ دوم ناتمامیت گودل[1] تیر خلاصی بود بر تمام تلاش‌هایی که برای خلاصیِ یک‌بار- برای- همیشه از ناسازگاری در ریاضیات صورت می‌گرفت.

مسألهٔ دوم مربوط است به قضایایی که جنبه‌های غیرشهودی ریاضیات را نیز برملا می‌کردند، مسأله‌ای که در برخی متون تحت عنوان مسألهٔ «بیش‌کاری» (doing too much) طرح شده است. به نظر می‌رسد که ریاضیات حتی اگر تمام انتظارات شهودی ما را برآورده سازد، به علت این که در موارد عدیده‌ای در قلمرو شهود متوقف نمی‌ماند و نتایج ناخواسته‌ای بر

گزاره‌های شهودی آن مترتب می‌شود، کماکان مورد اتهام و تردید قرار خواهد گرفت. یکی از معروف‌ترین موارد مربوط است به مسألهٔ «پیوستگی». تا حدود صد سال پس از کشف دوران‌ساز حساب دیفرانسیل و انتگرال توسط نیوتن و لایبنیتس، روش‌هایی که ریاضی‌دانان برای اثبات قضایای حسابان به کار می‌گرفتند مقید به استفادهٔ اجتناب‌ناپذیری از شهود هندسی مربوط به نمودارها بود. این استفادهٔ حذف‌ناپذیر از نمودارها نتایجی را برای معرفت ریاضیاتی و یقین آن داشت. چرا که معرفت ما از قضایای حسابان از جنس معرفت‌مان به نمودارها خواهد بود و یقینی‌تر از آن نخواهد بود. از این دو موضوع ـ یعنی جنس معرفت و یقین آن ـ اوّلی مسأله‌ای است فلسفی و دیگری مورد توجه عملی ریاضی‌دانان؛ و همین مسأله بود که توجه ریاضی‌دانان را به «تدقیق آنالیز» جلب کرد (Potter 2004, 81 – 2). بولتسانو با اثبات دقیق قضیهٔ بدیهیِ مقدار میانی در ۱۸۱۷ از پیش‌گامان این حرکت به شمار می‌آید. در این دوره مطالعه روی توابع پیوسته قدرت تئوریزه کردنِ بسیاری از شهودها را داده بود و گمان می‌رفت قضایای ریاضی از عهدهٔ شهود هندسی به خوبی برمی‌آیند. تا این که در نیمهٔ دوم قرن نوزدهم با کشف تعارضاتی بین قضایای ریاضی و شهود هندسی، ریاضیات معصومیت خود را تا حدودی ازدست‌رفته یافت. از سویی ریمان تابعی ارائه داد که روی تمام نقاط ناگویا پیوسته و روی تمام گویاها ناپیوسته است و از سوی دیگر کشف توابع پیوستهٔ همه‌جا مشتق‌ناپذیر، ریاضی‌دانان را متوجه جدی بودنِ مسأله ساخت. اولین مورد از این نوع توابع در سال ۱۸۴۰ توسط بولتسانو کشف شد، اما منتشر نشد تا این که وایرشتراس در ۱۸۶۱ مثال دیگری کشف و در سال ۱۸۷۲ آن را منتشر کرد. این مسأله در قرن بیستم حتی حادتر هم شد. در سال ۱۹۲۴ باناخ و تارسکی اثبات کردند که «**اصل انتخاب نتیجه می‌دهد که می‌توان سطح کرهٔ واحد را چنان به تعداد متناهی تکه تجزیه کرد که با حرکات صلب (تبدیلاتی که طول و زاویه را حفظ می‌کنند) در فضای اقلیدسی و در کنار هم قرار دادن مجدد آن‌ها، سطح دو کرهٔ واحد را تشکیل داد.**» (**رابینسون در ۱۹۴۷ نشان داد که تعداد این تکه‌ها را می‌توان تا ۴ تکه کاهش داد.**) برخی مشکل این قضیه را در پذیرش اصل انتخاب دانستند و سعی کردند با طرد این اصلِ به ظاهر بدیهی از شر این قضیه خلاص شوند. اما به نظر می‌رسد که مسأله فراتر از اصل انتخاب باشد. برای مثال به قضیهٔ عجیب زیر که هیچ نیازی به اصل انتخاب ندارد توجه کنید:

**قضیهٔ (مازورکیویچ ـ سی‌یرپینسکی ۱۹۱۴)**: زیرمجموعهٔ غیرتهی $E$ از صفحهٔ اقلیدسی وجود دارد با دو زیرمجموعهٔ مجزا که هر یک از آن‌ها را می‌توان به تعداد متناهی تکه تقسیم کرد، به طوری که می‌توان به‌گونه‌ای آن‌ها را به صورت ایزومتریک (حافظ طول) جابجا کرد تا به افرازی از $E$ دست یافت.

مجموعهٔ این مسایل زمینهٔ طرح سؤالات مربوط به رابطهٔ ریاضیات و واقعیت را مخصوصاً در بین ریاضی‌دانان ایجاد کرد و هم‌چنین به سؤالات تاریخی فلاسفه در این زمینه دامن زد. به

نظر می‌رسد اکنون که دغدغه‌های لازم برای ورود به بحث تا حدودی شکل گرفته باشد، وقت آن است که به بحث اصلی‌مان بپردازیم.

## ۱- ریاضیات غیریقینی و غیرضروری

در یک تقسیم‌بندی کلی، فلاسفه در زمینهٔ ریاضی به دو گروه تقسیم می‌شوند: برخی گزاره‌های ریاضی را یقینی و ضروری دانسته‌اند و عدهٔ قلیلی نیز آن‌ها را غیریقینی و غیرضروری به شمار آورده‌اند. البته ضرورت و یقین دو امر مجزا هستند و قابل تصور است که در جایی یقین داشته باشیم و اثری از ضرورت نباشد. برای مثال من یقین دارم که اکنون خطوط آبی بر سطح سفیدی را می‌بینم، گرچه هیچ ضرورتی در کار نیست و ممکن بود اکنون با خودکار قرمز بر کاغذ زردی بنویسم. با این حال در نظریاتی که در باب فلسفهٔ ریاضیات مطرح شده است، به ضرورت و یقین مانند دو امر هم‌بسته نگاه شده است. دلیل مهمی که به ذهن می‌رسد این است که برخلاف مثال قبل، در مورد گزاره‌های کلی تنها هنگامی می‌توان یقین حاصل کرد که گزاره حاوی ضرورت باشد و به همین دلیل در مورد ریاضیات، برخلاف مشاهدات حسی، ضرورت و یقین دو روی یک سکه‌اند.[۲] از شاخص‌ترین کسانی که به نفی یقین و ضرورت در ریاضیات پرداخته‌اند می‌توان به جان استوارت میل و کواین اشاره کرد. دیدگاه آن‌ها را می‌توان در این انگاره خلاصه کرد که ریاضیات همچون سایر علوم تجربی است، همچون فیزیک. رابطهٔ ریاضیات و واقعیت نیز مانند سایر علوم است، و بستگی دارد به این که چه جایگاهی برای علوم تجربی قایل باشیم. در حالی که میل دیدگاهی رئالیستی به علم دارد، کواین از رئالیسم در تمام زمینه‌ها از جمله ریاضیات پرهیز دارد. در واقع کواین با طرح فلسفهٔ موسوم به «طبیعت‌گرایی»، به سؤالات سنتی فلسفه، مثل «چه چیزهایی را می‌توانیم بشناسیم؟» و «چه نوع هویاتی وجود دارند؟»، معنایی غیرمطلق و سیال می‌بخشد. به نظر او بهترین نظریات ما اکنون بهترین نظریات علمی‌مان هستند، و برای پاسخ به سؤالات ذکر شده نباید به سراغ نظریات کلاسیک معرفت‌شناختی و متافیزیکی برویم. این که در هر زمان چه نوع هویاتی وجود دارند، موکول است به نظریات علمی حاکم بر آن زمان. از آن‌جا که از زمان گالیله بهترین نظریات علمی به زبان ریاضیات بنا و بیان شده‌اند، پس به نظر می‌رسد که تعهدی رئالیستی به مفاهیم و حقایق ریاضیاتی در کنه‌اندیشهٔ مدرن نهفته است. به‌ویژه این که تز کل‌گرایی[۳] متضمن تأیید هموارهٔ نظریات ریاضیاتی در کنار تأیید نظریات علمی توسط مشاهدات و آزمایشات فراوان است. چنان که مشخص است دیدگاه طبیعت‌گرایانه با از دور خارج کردن رئالیسم به معنای مطلق آن و ارائهٔ درکی نسبی (وابسته به شناخت و در نتیجه تاریخ‌مند) از آن، به همان میزان در قلمرو ریاضیات به معنای متعارف رئالیستی است که در سایر قلمروها، یعنی به هیچ وجه!

این دیدگاه مخالفان بزرگی دارد: طیف وسیعی از اندیشمندان که به شیوه‌های متفاوت قصد دفاع از ضرورت و یقین گزاره‌های ریاضیاتی را داشتند. با بررسی دیدگاه‌های شاخص این طیف به جمع‌بندی نسبتاً جامعی از بحث ریاضیات و واقعیت دست خواهیم یافت. به این منظور آن‌ها

را به دو دستهٔ عمده تقسیم می‌کنیم: قائلین به ترکیبی بودن گزاره‌های ریاضیاتی و قائلین به تحلیلی بودن این گزاره‌ها.

### ۲- ترکیبی‌گرایان

کسانی که قائل به ترکیبی بودن گزاره‌های ریاضیاتی‌اند، این گزاره‌ها را دارای محتوای واقعی دانسته و حاکی از جهان عینی می‌دانند. به همین دلیل اگر قرار است از رئالیسم در ریاضیات دفاع شود، باید در بین نظریات این اندیشمندان به جست‌وجو پرداخت. اما این‌که چنین نظریاتی تا چه حدی می‌توانند رئالیستی به شمار آیند، و یا این‌که تا چه حدی قابل دفاع هستند، در ادامه مورد بحث قرار خواهد گرفت. بررسی این نوع نظریات را تحت دو عنوان «دیدگاه افلاطونی» و «دیدگاه کانتی» دنبال می‌کنیم.

#### ۱. ۲- دیدگاه افلاطونی

بیایید به گذشته برگردیم، به آغاز باشکوه هندسهٔ اصل موضوعی اقلیدس. هندسهٔ اقلیدسی که داعیهٔ شناخت پیشین و ضروری از ساختار واقعی فضا را داشت، هندسه‌ای بود مبتنی بر روش استنتاج منطقی و اصول اولیه‌ای که اعتبار و درستی‌شان توسط شهود تضمین می‌شد. معمولاً شاهکار اقلیدس و تفاوت عمدهٔ هندسهٔ وی با هندسه‌های قبلی را در اصل‌موضوعی (axiomatic) بودن آن می‌دانند، غافل از این‌که اصل‌موضوعی شدن این هندسه خود نتیجهٔ حاکم شدن تفکر افلاطونی بر ذهن اقلیدس است و اگر اقلیدس توانست هندسه را اصل‌موضوعی کند به خاطر این بود که پیش از آن هندسه را از عالم محسوس به عالم مثالی (ideal) برکشیده بود. در قلمرو محسوسات با احکام جزیی و روش استقرایی روبه‌رو هستیم و مسألهٔ استقرا که بعدها توسط دیوید هیوم طرح شد، حاکی از آن است که در این روش هرگز نمی‌توان به ضرورت و یقین دست یافت. اقلیدس هر تعداد خط را نیز مورد مشاهده قرار داده باشد باز هم احکام مترتب بر آن‌ها احکامی جزیی و غیرقابل تعمیم (غیرقابل انتقال به موارد دیگر) خواهد بود. حداکثر چیزی که اقلیدس می‌تواند بگوید این است که تا آن‌جا که او مشاهده کرده، از تمام نقاط خارج از هر خط یک و تنها یک خط به موازات آن قابل رسم بوده است. اقلیدس بر چه مبنایی حکم موارد مشاهدتی خود را به تمام خط‌های ممکن تعمیم داده و مدعی صدق و ضرورت آن‌ها شده است؟

بازگردیم و از نقطه‌ای دیگر بیاغازیم. اقلیدس مدعی شهودی بودن مفاهیم و اصول اولیهٔ هندسه بود، اما آیا این ادعا موجه است؟ چگونه می‌توان یک نقطه یا خط هندسی را مورد شهود قرار داد؟ ما توسط حواس خود تنها می‌توانیم اشیاء فیزیکی را مورد شهود قرار دهیم، و در این اشیاء فیزیکی اثری از دقت و این همانی ریاضیاتی یافت نمی‌شود. آن دقت و این‌همانی‌ای که در خط راست، دایره، سطح صاف و... سراغ داریم. بنابراین به نظر می‌رسد هنگامی که اقلیدس هندسهٔ اصل موضوعی خویش را بر اساس شهود پایه‌ریزی می‌کند، عنصر تجرید را نیز به نظام خود تزریق می‌کند. اشیای هندسی مثل نقطه و خط تا ابد از دسترس شهود حسی ما خارج

می‌مانند، و حتی با تخیل نیز نمی‌توان بدان‌ها دست یافت. چرا که تخیل فقط می‌تواند اشکال محسوس را به اشکال محسوس دیگر تبدیل کند. اشیای هندسی همچون اعداد «ناگویا»یی هستند که تنها از طریق دنباله‌هایی از اعداد «گویا» (اوبژه‌های حسی و تغییریافته به وسیلهٔ تخیل) می‌توان الی‌الابد به سمت آن‌ها نزدیک شد، بدون این که هرگز به آن‌ها دست یافت. به همین دلیل جهان هندسه، جهانی است ورای جهان محسوس و ما این جهان را با دنباله‌هایی از شهودهای حسی می‌سازیم، همان‌گونه که اعداد ناگویا را از روی اعداد گویا می‌سازیم. شاید اکنون راحت‌تر بتوانیم ادعا کنیم که هندسهٔ اقلیدسی، برخلاف آن‌چه در آغاز به نظر می‌رسد، هندسهٔ شهودی نیست. در عین حال انتقال بین نظریهٔ پیشین هندسی و تحقیق تجربی در زندگی روزمره چنان برای ما آشنا است که تمایل داریم تمایزی بین فضا و اشکال فضایی مورد بحث هندسه و فضا و اشکال فضایی در واقعیت تجربی قائل نشویم؛ گویی این‌ها یکی هستند.

راز این دو مسأله (قابلیت صدور احکام ضروری و کلی و شهودناپذیری اشیا و احکام هندسی) را باید در تفکر افلاطونیِ پشت این هندسه جست. افلاطون ضمن برشمردن نقیصه‌های مشاهدهٔ حسی، برای دفاع از تفکر عقلانیِ مبتنی بر مفاهیم و گزاره‌های کلی، ناگزیر به پذیرش قلمرویی مختص مفاهیم کلی می‌شود؛ قلمرویی به نام عالم مُثل (ایده‌ها). مفاهیم و حقایق هندسهٔ اقلیدسی متعلق به این فضا هستند و افلاطون قائل به نوعی شهود عقلانی (در مقابل شهود حسی) نسبت به این عالم بود. از طرفی به نظر او عالم واقع و ادراک شده توسط حواس، رونوشتی از عالم مثل است. یعنی عالم واقع تابع و سایه‌ای است از عالم عقلانی. این امر (تبعیت عالم واقعی از عالم عقلانی) علاوه بر این که ایده‌آلیسم افلاطونی را نشان می‌دهد، مبنای افلاطونیِ کاربردی بودن هندسه را نیز در اختیار ما قرار می‌دهد. هندسه اگر مطابقتی تقریبی نیز با طبیعت دارد به خاطر این است که طبیعت تا حدودی مطابق است با عالم عقلانی‌ای که هندسه تئوری مکان آن است. آشکار است که افلاطون در عین حال که از عینیت هندسه دفاع می‌کند و محتوای معرفتی برای آن قائل است، به معنای متداول و موردنظر خیلی از ریاضی‌دانان قائل به رئالیسم در حوزهٔ ریاضیات نیست. چراکه ریاضیات را توصیف عالم واقع (طبیعت) نمی‌داند. (این که نحوهٔ دسترسی به اوبژه‌های مثالی (شهود عقلانی) چیست و آیا افلاطون مجاز به تکثیر عالم و رونوشت دانستن عالم واقع نسبت به عالم عقلانی بود یا نه، سؤالاتی است که در ضمن سؤالات بسیارِ دیگری همواره مورد بحث فلاسفه بوده است.)

اکنون که مشخص شد افلاطون‌گرایی چه تبعاتی برای ریاضیات به همراه داشته است و رئالیسم مورد ادعای افلاطون‌گرایان از چه نوعی است، به سراغ رویکرد دوم در بین فلاسفهٔ قائل به ترکیبی بودن گزاره‌های ریاضیات می‌رویم، یعنی رویکرد کانتی.

### ۲. ۲- دیدگاه کانتی

کانت برای توجیه گزاره‌های ضروری و کلی که به نظر می‌رسد محتوای معرفتی داشته باشند، نظریهٔ شناخت خود را بنا می‌نهد. کانت به دلایل محکم فلسفی که از هیوم باقی مانده

بود متقاعد شده بود که گزاره‌های ضروری و کلی نمی‌توانند مبتنی بر تجربه باشند و بنابراین باید آن‌ها را پیشین (مقدم بر هر تجربه‌ای) دانست. پس مسألهٔ کانت توجیه گزاره‌های ترکیبی پیشین است. ترکیبی بودن این گزاره‌ها مستلزم ارتباطی بین آگاهی و عالم واقع است و پیشین بودن آن‌ها مانع خروج از آگاهی به سمت عالم واقع. با این مقدمات تنها راهی که برای کانت باقی می‌ماند، به زبان غیرفنی، آوردن عالم واقع به حیطهٔ آگاهی است؛ یعنی به جای این‌که آگاهی خودش را با عالم واقع منطبق کند، این عالم واقع است که باید به ساز آگاهی برقصد! اما این دیدگاه را نباید با دیدگاه افلاطونی اشتباه گرفت؛ چرا که کانت به هیچ وجه حاضر به پذیرفتن شهود عقلانی نیست. افزون بر این‌که در این‌جا خبری از تکثیر افلاطونی عالم نیست. بنابر فرضیهٔ کانت (که طبق توضیح قبل، برای توجیه گزاره‌های ترکیبی پیشین طرح شد) گرچه عالم واقع مستقل از ما است، اما برای این‌که به آگاهی درآید باید لباس‌هایی از جانب آگاهی بر تن کند، لباس‌هایی که کانت آن‌ها را صور پیشین ادراک نام می‌نهد و شامل صور پیشین احساس و صور پیشین فاهمه می‌شوند. کانت صور پیشین احساس را «مکان» و «زمان» می‌داند و قائل است به این‌که هیچ مشاهدهٔ حسی صورت نمی‌گیرد مگر در قالب صور پیشین مکان و زمان. تمام آن‌چه ما به عنوان عالم واقع می‌شناسیم و ادراک می‌کنیم چیزی جز همین عالم پدیدارِ ملبس به صور پیشین ادراک نیست؛ چراکه ما هیچ دسترسی به عالم فی‌نفسه و ورای آگاهی نداریم و این عالم تا آخر یک «اسم» باقی می‌ماند. اسمی که وظیفهٔ رئالیستی معرفی کردن فلسفهٔ کانت را بر دوش می‌کشد.

با این مقدمات می‌پردازیم به توجیه کانت بر ترکیبی و پیشین بودن هندسهٔ اقلیدسی. به نظر کانت صورت پیشین مکان قالبی است تهی که تا پر نشود آگاهی شکل نمی‌گیرد، اما همین که واقعیت پدیداری شکل گرفت می‌توان برگشت و قواعد محض حاکم بر قالب مکان (صورت پیشین احساس) را متمایز کرد. از آن‌جا که این قواعد بر صورت پیشین مکان حاکم‌اند و هر امر واقعی (به‌معنای واقعیت پدیداری) تحت صورت پیشین مکان قالب زده شده است، پس این قواعد احکام ضروری و کلی حاکم بر تمام واقعیات پدیداری را بیان می‌دارند. به نظر کانت کاری که اقلیدس در هندسه انجام داد کشف این قواعد حاکم بر صورت پیشین مکان بود و همین امر ضامن یقین و ضرورت گزاره‌های هندسهٔ اقلیدسی است (علم حساب نیز مربوط می‌شود به صورت پیشین زمان).

چنان‌که از این شرح مختصر برمی‌آید کانت به معنای خاص خودش در حوزهٔ ریاضیات رئالیست است، گرچه میانه‌ای با رئالیسم به معنای رایج آن ندارد. اگر واقعیت را به معنای شیء فی‌نفسه و ورای آگاهی در نظر بگیریم، کانت در زمینهٔ ریاضیات یک غیررئالیست و بل که یک آنتی‌رئالیست تمام‌عیار است؛ اما اگر واقعیت را به‌تبع کانت همین واقعیت پدیداری (همین طبیعتی که به آن اشاره می‌کنیم) بدانیم، کانت در ریاضیات قائل به رئالیسم است. البته شایان ذکر است که کانت با وجود رئالیستی دانستن هندسهٔ اقلیدسی، آن را مانند افلاطون خارج از

حوزهٔ شهود حسی می‌داند، و اصولاً شهود حسی را پس از اِعمال این صور پیشین به رسمیت می‌شمرد. جدا از این که با طرح هندسه‌های غیراقلیدسی مواضع افلاطون و کانت با چالش‌هایی مواجه شد، در سنت فلسفی نیز مشکلات عدیده‌ای بر آن‌ها، به‌ویژه بر دیدگاه کانتی، وارد شده است که برای پی‌گیری آن‌ها بایستی به متون تخصصی فلسفه مراجعه کرد.

چیزی که تا این‌جا مشخص شده است این است که در هر دو دیدگاه افلاطونی و کانتی، ریاضیات به معنای رایج کلمه غیر رئالیستی است و در معنای خاص این فلسفه‌ها است که می‌توان از رئالیسم در ریاضیات سخن گفت؛ مضاف بر این که در هر دو مورد، هندسه در عین رئالیستی بودن غیرشهودی است و باید ادعای شهودی بودن خود را به کنار نهد. بعد از معرفی مختصر این دو گروه عمده، وقت آن است که به دستهٔ دوم بپردازیم. یعنی کسانی که گزاره‌های ریاضیاتی را تحلیلی و عاری از هر محتوای عینی به شمار آورده‌اند. در بین مدافعین این دیدگاه اختلاف زیادی دیده نمی‌شود و ما نظر به اهمیت و اختلافات کم‌وبیش بین آن‌ها به دیدگاه‌های هیوم، پوزیتیویست‌های منطقی و هیلبرت اشاره‌ای می‌کنیم.

## ۳- تحلیلی‌گرایان

دیدگاه هیوم در نگاه نخست مبتنی بر تحلیلی دانستن گزاره‌های ریاضیات به نظر نمی‌رسد. چرا که این گزاره‌ها را بیان روابط بین تصورات کلی در نظر می‌گیرد:

> این‌که مربع وتر برابر است با مجموع مربعات دو ضلع، گزاره‌ای است که رابطهٔ بین این اشکال را بیان می‌کند (Hume, 2007, 18).

از آن‌جا که هیوم تحلیلی نام‌گرایانه از تصورات کلی ارائه می‌دهد، مفهوم کلی مثلث تنها اسمی است که قادر است هر مثلث جزیی محسوس را نزد ذهن حاضر سازد. به همین دلیل احکام هندسه روابط بین تصورات جزیی محسوس را بیان می‌کنند و چیزی که مسلم است در این تصورات جزیی محسوس اثری از کمال و دقت مورد نظر ریاضیات یافت نمی‌شود و در نتیجه ضرورت و یقین احکام هندسی مورد خدشه واقع می‌شود. البته هیوم در اثر قبلی خود، *رساله*، اظهار داشته بود که هندسه به پای دقت و یقین کاملی که ویژهٔ حساب و جبر است نمی‌رسد، و نوشته بود:

> چنین می‌نماید که تصورات‌مان اطمینان کامل به ما می‌دهند که هیچ دو خط موازی نمی‌توانند نقطهٔ اشتراکی داشته باشند؛ ولی اگر این تصورات را بررسی کنیم، می‌بینیم که آن‌ها همیشه انحراف محسوس دو خط را فرض می‌گیرند و جایی که زاویه‌ای که تشکیل می‌دهند به‌غایت کوچک است، ما ملاکی از خط راستی به چنان دقت نداریم که از صدق این گزاره به ما اطمینان می‌دهد.... بنابراین جبر و حساب به‌منزلهٔ یگانه علومی‌اند که در آن‌ها می‌توانیم زنجیره‌ای از استدلال را به هر درجه از پیچیدگی پیش بریم و باز دقت و یقین کامل را نگه‌داریم (به نقل از کاپلستون، ۱۳۷۵، ۲۹۳).

به نظر هیوم تنها با تحویل هندسه و حساب به جبر است که به‌راحتی می‌توانیم از تحلیلی بودن ریاضیات دفاع کنیم و این خطی است که از هیوم آغاز و توسط پوزیتیویست‌های منطقی دنبال می‌شود. ریاضیات چیزی نیست جز برقراری نسبت‌هایی بین یک دسته علایم و بسط نتایج حاصل از این نسبت‌ها:

> قلمروِ تعاریف به معنایی وسیع‌تر شامل آن گزاره‌هایی که توسط منطق محض از تعاریف نتیجه می‌شوند نیز است. از لحاظ معرفت‌شناختی، این گزاره‌های استنتاج‌شده مثل تعاریف هستند، چراکه... با آن‌ها قابل تعویض هستند. از این منظر علومِ صرفاً مفهومی، مانند حساب، در واقع تنها شامل تعاریف هستند؛ آن‌ها هیچ‌چیزِ اساساً تازه‌ای به ما نمی‌گویند، هیچ‌چیزِ فراتر از اصول (Schlik, 2002, 73).

این نگرش چیزی است که امروزه تحت عنوان صورت‌گرایی در ریاضیات مطرح است، اما نکتهٔ مهمی که باید به آن اشاره کرد تفاوت قابل‌توجه صورت‌گرایی هیلبرت با این دیدگاه است. هیلبرت ضمن تفکیک قائل شدن بین ریاضیات متناهی و نامتناهی، در قلمرو ریاضیات متناهی دیدگاه کانت به ریاضیات را می‌پذیرد، و ریاضیات نامتناهی را صحنهٔ صورت‌گرایی محض می‌داند. این تفکیک قلمروها در موارد متعددی در فلسفهٔ علم رخ داده است، مثل وقتی که کرونکر گفت «خداوند اعداد صحیح را آفرید، باقی همه کار انسان است»، یا مثل تفکیک فیزیک به دو قلمرو *مشاهدتی* و *نظری* توسط ابزارانگارن.

در دوره‌های متأخر دیدگاه تحلیلی به ریاضیات توسط کسانی مثل مایکل رزنیک و استوارت شپیرو، تحت عنوان «ساختارگرایی» به شکل دقیق و پخته‌تری طرح شده است. برطبق ساختارگرایی اوبژه‌های ریاضیاتی چیزی نیستند جز موقعیت‌هایی درون ساختارها و هیچ هویتی و ویژگی‌ای خارج از ساختارها ندارند (Resnik, 1981, 530). برای مثال، بنابر ساختارگرایی

> موضوع حساب الگویی است مشترک میان تمام سیستم‌های نامتناهی از اشیایی با یک عضو اولیه، رابطهٔ تالی یا عمل‌گری که در اصل استقرا صدق می‌کند... یک عدد طبیعی مثل ۶ مکانی است در ساختار اعداد طبیعی... (Shapiro, 2005, 21).

یکی از نتایج این دیدگاه ترجمه‌ناپذیری مفاهیم است. چرا که این ساختارها هستند که معنابخش‌اند و یک مفهوم از یک ساختار به ساختار دیگر معنای متفاوتی به خود می‌گیرد. برای نمونه، «خط» در هندسهٔ اقلیدسی و هندسهٔ ریمانی به دو مفهوم متمایز اشاره دارد.[۴]

## ۴- مسأله کاربردپذیری

با وجود تمام اختلافات ذکر شده، یک امر مسلم است و آن این که هر جا گزاره‌های ریاضیاتی را تحلیلی بدانیم بحث رئالیسم منتفی خواهد بود. معمولاً در مقابل این نگرش عده‌ای به کاربرد حیرت‌انگیز ریاضیات در علم استناد می‌کنند[۵] و آن را نشانهٔ رئالیستی بودن مفاهیم و احکام ریاضیاتی (مخصوصاً به شکل افلاطونی آن) می‌دانند:

> باید گفت که این ویژگی ریاضیات [کاربردی بودن] به شدت مؤیّد افلاطون‌گرایی است، چراکه ما در اینجا به طور ضمنی بر وجود قلمروِ مجزای ریاضیاتی، که در آن جهان طبیعی را بازنمایی می‌کنیم، صحه می‌گذاریم. البته نام‌گرایان پاسخ خواهند داد که این بازنمایی توسط نماد اعداد صورت می‌گیرد، نه خود اعداد، و بنابراین این مسأله به صورت قاطع مؤیّد افلاطون‌گرایی نخواهد بود. با این وجود طبیعی بودن افلاطون‌گرایی در ریاضیات کاربردی، درست مثل ریاضیات محض، آشکارا بدیهی است. (Brown, 2008, 53).

اما باید به خاطر داشت که صرف تحلیلی بودن ریاضیات ارتباطی به بحث کاربردی بودن آن ندارد و مهم این است که انتخاب ساختارهای ریاضیاتیِ مورد مطالعه، بر اساس نیازها و معیارهای پراگماتیستیِ موجود در علوم تجربی صورت می‌گیرد. کواین در دفاع از صورت‌گرایی در مقابل ایراد کاربرد ریاضیات می‌نویسد:

> یک صورت‌گرا ریاضیات کلاسیک را بازی با علامت‌های بی‌دلالت به حساب می‌آورد. این بازی با علامت‌ها هنوز هم می‌تواند کاربردی باشد... اما کاربرد لازم نیست متضمن دلالت ـ به هر معنای تحت‌اللفظی ـ باشد. همین‌طور توفیق چشم‌گیر ریاضی‌دانان در سرهم کردن قضایا و یافتن مبانی عینی برای توافق در نتایجی که هر کدام به آن‌ها رسیده‌اند نیز لازم نیست متضمن دلالت باشد. زیرا مبنای کافی برای توافق میان ریاضی‌دانان به‌سادگی می‌تواند در قواعدی که حاکم بر بازی با علامت‌ها است یافت شودـ زیرا این قواعد نحوی (syntactical rules) برخلاف خود علامت‌ها، کاملاً دارای دلالت و قابل فهم هستند (Quine, 1964, 15).

تعویض‌پذیریِ نظریات ریاضیاتی که دراندیشه‌های قراردادگرایانهٔ پوانکاره به‌زیبایی و دقت بیان شده است، شاهد دیگری است بر درستیِ مدعای کواین. پوانکاره در تمثیلی هوشمندانه این انگاره را چنین شرح می‌دهد: فرض کنید دانشمندانی دو بعدی در یک سطح اقلیدسی به شکل دیسک محدود باشند. آن‌ها به دنبال تعیین هندسهٔ جهان خویش می‌باشند. حال فرض کنید خط‌کش‌ها و وسایل اندازه‌گیری آن‌ها به صورت خطی با تغییرات دما تغییر طول دهند. دما در مرکز دیسک $TR^2$ (R شعاع دیسک و T ثابت) است و در هر نقطهٔ دیسک دما برابر است با $T(R^2 - r^2)$ (که r فاصلهٔ آن نقطه تا مرکز دیسک است). بنابراین توزیع دما به گونه‌ای است که در مرز پیرامون دیسک دما به صفر میل می‌کند و در نتیجه طول خط‌کش‌اندازه‌گیری نیز به سمت پیرامون دیسک همواره کاهش می‌یابد. حال اگر ساکنین این دیسک گمان کنند که طول خط‌کش‌هاشان همواره ثابت بوده است، به‌سادگی به این نتیجه می‌رسند که در یک سطح دو بعدی نامتناهی لوباچوفسکی با انحنای ثابتِ منفی زندگی می‌کنند. حتی اگر آن‌ها از نور برای تعیین هندسه‌شان استفاده کنند، می‌توانیم سطح دیسک را از موادی با ضریب شکست متغیر بسازیم به طوری که باز هم این دانشمندان فریب بخورند و به نتیجهٔ قبلی برسند (Sklar, 1992, 55-6). اکنون جهان سه بعدی خود را در نظر می‌گیریم. آیا در اینجا نیز

نمی‌توان گفت که آن چه باعث شده است هندسهٔ جهان را غیراقلیدسی بدانیم، کم و زیاد شدن طول وسایل‌اندازه‌گیری و شکست نور است؟ در مثال دو بعدی، ما موجودات سه‌بعدی به‌عنوان مرجع نهایی، ادعای درست را از نادرست بازمی‌شناختیم. اما در اینجا دیگر چنین مرجعی وجود ندارد. این خود ما هستیم که از هندسه‌های ممکن یکی را برمی‌گزینیم. یعنی هندسهٔ حقیقی جهان به تصمیم یا قرارداد ما بستگی پیدا می‌کند. بنابراین این مسأله به جانب ما واگذار می‌شود که آیا هندسهٔ اقلیدسی و فیزیک نیوتونی (با اضافه کردن قوانین جدید مخصوصاً برای نور و وسایل‌اندازه‌گیری) را بپذیریم یا هندسهٔ ریمانی و فیزیک نسبیتی را.

> بنابراین اصول موضوعهٔ هندسه، نه شهودهای پیشین ترکیبی‌اند و نه واقعیات تجربی. آن‌ها قراردادند. انتخاب ما از بین تمام قراردادهای ممکن با راهنمایی واقعیات تجربی صورت می‌گیرد؛ اما باز هم آزادانه باقی می‌ماند، و تنها محدودیتی که وجود دارد ضرورت اجتناب از تناقض است. یعنی حتی زمانی که قوانین تجربی تعیین‌کنندهٔ پذیرش اصول، خود صدق تقریبی داشته باشند، آن اصول صدق اکید دارند. به عبارت دیگر اصول موضوعهٔ هندسه (دربارهٔ اصول موضوعهٔ حساب سخن نمی‌گویم) تنها تعریف‌هایی در لباس مبدِل هستند. حال راجع به این سؤال چه باید اندیشید: آیا هندسه اقلیدسی درست است؟ این سؤال، بی‌معنا است. مثل این است که بپرسیم آیا سیستم متری درست است؟ و آیا وزن‌ها و اندازه‌گیری قدیمی نادرست‌اند؟ آیا محورهای مختصات دکارتی درست‌اند و محورهای مختصات قطبی نادرست؟ یک هندسه نمی‌تواند درست‌تر از دیگری باشد؛ تنها می‌تواند از آن راحت‌تر و مناسب‌تر باشد (Poincare, 1905, 50).

در مورد جبر، مسأله به این سادگی نیست و توجیه کاربردی بودن ریاضیات در این حیطه بحث‌های دقیق‌تری می‌طلبد (برای نمونه ر.ک. Steiner, 2005, 627 – 41). با مثالی سعی می‌کنیم سرنخی از این نوع تلاش‌ها را در زمینهٔ جبر به دست دهیم. اعداد حقیقی مثبت با عمل ضرب $(R^+ , *)$ هیچ تفاوت ساختاری با اعداد حقیقی با عمل جمع $(R , +)$ ندارد. تابع نمایی $f(x) = e^x$ یک یک‌ریختی[۶] بین آن‌ها برقرار می‌کند. برای مثال:

$$f(5) * f(6) = e^5 * e^6 = f(5 + 6)$$

هیچ آزمایشی نمی‌توان برای تمایز گذاشتن بین این دو ساختار ترتیب داد. ما می‌توانیم قانون حاکم بر یک فرایند فیزیکی را هم با حاصل‌ضرب دو کمیت مثبت، توصیفِ ریاضیاتی کنیم، و هم با حاصل‌جمع دو کمیت. در اینجا نیز سؤال از درست بودن هر کدام از این دو ساختار ریاضیاتی بی‌معنا است.

## نتیجه

از میان دیدگاه‌هایی که ذکر شد تنها دیدگاه تجربه‌گرایانهٔ جان استوارت میل، به معنای معمول کلمه، رئالیستی است. اما از آن‌جا که این دیدگاه از عهدهٔ توجیه ضرورت و یقینِ نهفته در گزاره‌های ریاضیاتی برنمی‌آید، چندان مورد قبول واقع نشده است. اگر بخواهیم با حفظ

ضرورت و یقین ریاضیات، همچنان دیدگاهی رئالیستی به ریاضیات داشته باشیم، به نظر می‌رسد که باید به تغییرات ظریف و دقیق فلسفی در مفهوم واقعیت و انتظارمان از آن، تن دهیم. تنها با این تغییر نگرش است که می‌توانیم از رئالیسم در ریاضیات دفاع کنیم. افلاطون و کانت، هر کدام به نوعی، امکان این تغییر نگرش و در نتیجه دفاع از رئالیسم در ریاضیاتِ ضروری و یقینی را برای ما فراهم می‌آورند. اما مشکلات فلسفی و پیش‌داوری‌های عدیدهٔ متافیزیکی، فیلسوفان معاصر را به کنار گذاشتن این دو دیدگاه واداشت، امری که به بازبینی در فلسفهٔ ریاضیات نیز انجامید. فیلسوفان ریاضی در دوران معاصر، تحت تأثیر رواج دیدگاه‌های ساختارگرایانه و حمله به مبناگرایی، ریاضیات را قابل تحویل به زبان و قراردادهای عمل‌گرایانه دانستند. الزامات معرفت‌شناختی‌ای که فلسفهٔ معاصر به آن‌ها دست یافته است، ما را بیش از پیش به پذیرش این دیدگاه‌های ضدرئالیستی وامی‌دارد. این دیدگاه‌ها گرچه بسیاری از مشکلات معرفت‌شناختی را پشت سر می‌گذارند، اما در مقابل با مشکل دیگری مواجه می‌شوند که ناشی از کاربرد وسیع و حیرت‌انگیز ریاضیات در واقعیت است. اکنون مسألهٔ ما توجیه این کاربردپذیری، در عین دفاع از دیدگاه ضدرئالیستی در ریاضیات است. اما این مسأله، پیش از این نیز رخ داده بود، آن‌جا که منطق را، که برآمده از واقعیت نیست، زبان بنیادین تمام علوم و معارف بشری دانستیم. ریاضیاتْ کاربردی است. چون زبان علم است؛ چون ساختارهایی نظری را بنا می‌کند که در نهایت پراگماتیسم عهده‌دار گزینش میان آن‌ها است. ساختارگرایی نسبت میان ریاضیات و فیزیک (و نیز تجربهٔ حسیِ روزمره) را شبیه نسبت میان منطق و آگاهی می‌داند. در هر دو مورد با زبان‌هایی مواجه هستیم که ابزار شناخت ما هستند. زبان‌هایی که برآمده از تجربه‌های حسی جزیی نیستند و در عین حال محملی برای صورت‌بندی و بیان آن‌ها هستند. «کاربرد لازم نیست متضمن دلالت ـ به هر معنای تحت‌اللفظی ـ باشد».

## پی‌نوشت ها

۱- بنابر قضیهٔ دوم ناتمامیت گودل یک نظام صوری شده که شامل حساب هم باشد، نمی‌تواند سازگاری خود را اثبات کند.

۲- البته این هم‌بستگی در مورد براهین پیچیده مورد تردید واقع شده است. برای مثال وقتی آندرو وایلز در سال ۱۹۹۳ برهان پیچیده‌ای بر آخرین قضیهٔ فرما آورد، کم‌تر کسی گمان می‌کرد بعد از مدتی برهان‌اش رد شود و وی یک سال بعد برهان صحیح را ارائه دهد. سؤالی که از پسِ این رویداد تاریخی به ذهن خطور می‌کند این است که از کجا معلوم که این برهان جدید نیز، و هم‌چنین براهینی به پیچیدگی آن، بعدها باطل نشود؟! این سؤال اگر به درستی پاسخ داده نشود، ویران‌گر «یقین» خواهد بود.

۳- کواین دیدگاه کل‌گرایانهٔ خودش را این‌گونه توضیح می‌دهد: «کل آن‌چه علم یا باورهای ما خوانده می‌شود، از اتفاقی‌ترین موضوع‌های جغرافیایی و تاریخی تا ژرف‌ترین قوانین فیزیک اتمی یا حتی ریاضیات خالص و منطق، فرشی است بافتهٔ دست آدمی که فقط لبه‌های آن به تجربه برخورد می‌کند. یا به تمثیل دیگری، کل علم مانند میدان نیرویی است که تجربه شرایط مرزی آن باشد. وقتی که در حاشیه، با تجربه تعارضی پیدا می‌شود، این تعارض باعث تعدیل‌های مجددی در درون میدان می‌شود. در این حالت باید در اطلاق صدق و کذب به پاره‌ای از قضایای خود تجدیدنظر کنیم. تجدیدنظر در صدق و کذب پاره‌ای از قضایا مستلزم تجدیدنظر در صدق و کذب پاره‌ای از قضایای دیگر است. زیرا این دو دسته از قضایا با یک‌دیگر ارتباط منطقی دارند ـ چون قوانین منطق خود فقط پاره‌ای از قضایای دیگر آن دستگاه، پاره‌ای عناصر دیگر آن میدان هستند. وقتی در صدق و کذب قضیه‌ای تجدیدنظر کردیم باید در صدق و کذب پاره‌ای قضایای دیگر نیز تجدیدنظر کنیم که ممکن است با قضیهٔ اول پیوند منطقی داشته باشند یا خود آن‌ها پیوند منطقی باشند. اما تأثیر شرایط مرزی میدان، یعنی تجربه، در تعیین کل میدان به صورتی است که برای انتخاب قضایایی که باید در صدق و کذب آن‌ها با توجه به هر تجربهٔ نقضی واحدی تجدیدنظر شود عرصهٔ پهناوری وجود دارد. هیچ تجربهٔ خاصی با هیچ قضیهٔ خاصی که در درون میدان است پیوندی ندارد مگر پیوندی غیرمستقیم آن‌هم با توجه به ملاحظاتی که در کل میدان تأثیر می‌کند» (کواین، ۱۳۷۴، ۲ ـ ۲۷۱).

۴- هیلبرت می‌گوید: «هر اصل موضوعه چیزی به تعریف می‌افزاید، و بنابراین هر اصل موضوعهٔ جدید مفهوم را تغییر می‌دهد. "نقطه" همواره در هندسهٔ اقلیدسی، غیراقلیدسی، ارشمیدسی و غیرارشمیدسی چیز متفاوتی است» (Frege, 1971, 13).

۵- «چگونه می‌توان بدون دست کشیدن از مشخصه‌های ویژهٔ استدلال ریاضیاتیِ محض [کلیت، یقین و ضرورت]، توانایی ریاضیات محض را در توصیف و ارتباط با جهان طبیعیِ دسترسی‌پذیر در تجربه توضیح داد؟» (Shabel, 2005, 30 – 31)

۶- یک یک‌ریختی بین ساختارهای (A , r) و (A’ , r’) تابع یک‌به‌یک و پوشایی است مثل f بین مجموعه‌های A و A’ به طوری که:

$$(\forall x, y \in A)(xry \leftrightarrow f(x)r'f(y))$$

## منابع


- کاپلستون، فردریک. (۱۳۷۵)، *تاریخ فلسفه، ج۵، فیلسوفان انگلیسی*، ترجمهٔ امیر جلال‌الدین اعلم، تهران، شرکت انتشارات علمی و فرهنگی و انتشارات سروش.
- کواین، ویلارد ون اورمن. (۱۳۷۴)، «دو حکم جزمی تجربه‌گرایی»، *فصل‌نامهٔ ارغنون شماره ۷ و ۸*، ترجمهٔ منوچهر بدیعی، تهران، سازمان چاپ و انتشارات وزارت فرهنگ و ارشاد اسلامی.

- Brown, J. R. *Philosophy of Mathematics, A Contemporary Introduction to the World of Proofs and Pictures,* Routledge, 2008.
- Frege, G. *On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic,* trans. and ed. by E. H. Kluge, New Haven: Yale University Press, 1971.
- Hume, D. *An Enquiry Concerning Human Understanding*, Oxford University Press, 2007.
- Poincare, H. *Science and Hypothesis,* London: The Walter Scott Publishing Co, 1905.
- Potter, M. *Set Theory and its Philosophy*, Oxford University Press, 2004.
- Quine, W. V. *From a Logical Point of View,* Cambridge, MA: Harvard University Press, 1964.
- Resnik, M. “Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference”, in *Nous,* 15: 529 – 50, 1981.
- Schlik, M. *General Theory of Knowledge,* Open Court, 2002.
- Shabel, L. “Apriority and Application: Philosophy of Mathematics in the Modern Period”, in *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic,* Oxford University Press, 2005.
- Shapiro, S. “Philosophy of Mathematics and it’s Logic: Introduction”, in *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic,* Oxford University Press, 2005.
- Sklar, L. *Philosophy of Physics,* Oxford University Press, 1992.
- Steiner, M. “Mathematics – Application and Applicability”, in *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic,* Oxford University Press, 2005.