University of Tabriz-Iran
Quarterly Journal of
Philosophical Investigations
ISSN (print): 2251-7960
ISSN (online): 2423-4419
Vol. 12/ No. 22/ spring 2018

پژوهش‌های فلسفی
فصلنامه علمی-پژوهشی
سال ۱۲/ شماره ۲۲/ بهار ۱۳۹۷

مبانی «برنهاد منطق ریاضی» راسل*

معصومه علی‌حسن‌زاده اصل**
دانش آموخته کارشناسی ارشد فلسفه، دانشگاه تبریز (نویسنده مسئول)

مسعود امید
دانشیار گروه فلسفه دانشگاه تبریز

چکیده

با در نظر گرفتن دو جریان فراگیر فلسفی قرن نوزدهم یعنی ایده‌آلیسم و رئالیسم، آنچه در این مقاله مورد بررسی قرار می‌گیرد این است که راسل بر پایه کدام نظام فلسفی منطق‌گرایی خود را بنا کرد. طرح منطق‌گرایی راسل در سه دوره فکری بررسی می‌شود. در دوره اوّل راسل در بررسی‌های منطقی خویش رویکرد ایده‌آلیستی دارد. در دوره دوّم با پایه‌ریزی فلسفه رئالیستی خود نسخه اوّلیه منطق‌گرایی‌اش را در *اصول* می‌آورد. در دوره سوّم به دلیل پارادوکس‌های برخواسته از جریان منطق‌گرایی، راسل به ایده‌آلیسم اصلاح یافته‌ای روی می‌آورد و با ارائه «نظریه طبقات» نسخه کاملی از منطق‌گرایی خود را در کتاب *مبانی ریاضی* ارائه می‌دهد. امّا راسل همچنان در ارائه عمومیتی معتبر که برای منطق و ریاضیات اساسی است با موانعی مواجه می‌شود. نهایتا راسل دو «اصل موضوع تحویل‌پذیری» و «اصل موضوع بی‌نهایت» را برای برداشتن این موانع مطرح می‌کند تا بتواند نظام منطقی خود را به درستی بنا کند.

واژگان کلیدی: فلسفه ریاضی، راسل، منطق‌گرایی، نظریه مجموعه‌ها، نظریه توصیفات.

---

* تاریخ وصول: ۹۵/۹/۲۷ تائید نهایی: ۹۵/۱۲/۲۴
مقاله برگرفته از پایان‌نامه کارشناسی ارشد با عنوان: منطق‌گرایی در فلسفه ریاضی راسل در دانشگاه تبریز، استاد راهنما: دکتر مسعود امید، تاریخ تکمیل پایان‌نامه: ۹۲/۱۰/۸

** E-mail: masoomehasanzade@gmail.com

مقدمه

از نظر منطق‌گرایان، ریاضیات شاخه‌ای از منطق محسوب می‌شود. به‌جای اینکه منطق ابزاری برای ریاضیات باشد، منطق منشاء پیشروی ریاضیات می‌شود. در این دیدگاه تمام مفاهیم پایه ریاضی باید در قالب مفاهیم منطقی تدوین شوند و همه قضایای ریاضیات باید به عنوان قضایای منطق بسط یابند. تمایز ریاضیات و منطق صرفا برای تسهیل در کار صورت می‌گیرد، در صورتی که در نهایت آنچه مطرح می‌باشد فقط منطق است(ایوز، ۱۳۶۹: ۳۲۱). زمینه این دیدگاه را باید در آرای لایبنیتس (Gottfried Wilhelm Leibniz)، فیلسوف آلمانی، جست. او یکی از بنیانگذاران منطق ریاضی بشمار می‌آید و معتقد بود که نظام‌های ریاضی می‌توانند قالب خوبی برای مبانی تفکر باشند و ریاضیات بهترین ابزار برای بیان اندیشه‌ها و تفکرات بشمار می‌آید. نظریه اساسی لایبنیتس این بود که حقایق ریاضی و منطق هر دو مبتنی بر "اصل عدم تناقض"[1] هستند(بارکر، ۱۳۴۹: ۱۳). بنابر «اصل عدم تناقض» قبول دو قضیه که یکی آنچه را که دیگری انکار کرده اثبات می‌نماید مجاز نمی‌باشد. نتیجه منطقی چنین نظری آن است که طی مراحلی محدود می‌توان کلیه گزاره‌های ریاضی و منطق را به گزاره‌های یکسان تحلیل نمود. لایبنیتس تلاش‌هایی در این زمینه کرده بود ولی احترام به ارسطو سد راه او شده بود. فرگه (Friedrich Ludwig Gottlob)درصدد بود علم حساب را به منطق فروکاهد. او عقیده داشت که فقط قوانین عدد را می‌توان از طریق تعریف آنها بصورت نوعی مجموعه مجموعه‌ها تعریف کرد و به این طریق آنها را به قوانین منطق تحویل کرد. (بارکر، ۱۳۴۹: ۱۶۳) امّا راسل (Bertrand Arthur William Russell) و وایتهد (Alfred North Whithead) ادعایی بس بزرگتر از اسلاف خود داشتند، آنها منطق‌گرایی(Logicism) را به اوج خود رساندند زیرا ادعا داشتند که کل ریاضیات را می‌توان به منطق فروکاست.

راسل در ابتدا به عنوان دانشجوی رشته ریاضی در دانشگاه کمبریج تحصیل می‌کرد. بعد از اتمام دوره چهار ساله تحصیلات خود به فلسفه روی آورد و پیرو جو حاکم در کمبریج دیدگاه ایده‌آلیستی اتخاذ کرد. امّا بعدها عناصر ایده‌آلیستی را در تقابل با تز منطق‌گرایی و صدق جهان‌شمول ریاضیات دید. در این مقاله ماهیت و چگونگی این تقابل مورد بررسی قرار خواهد گرفت. متعاقب چنین اعتقادی راسل از ایده‌آلیسم رویگردان شد و فلسفه رئالیستی خود یعنی «اتمیسم افلاطونی» (Platonic Atomism) را در تقابل با ایده‌آلیسم پی‌ریزی کرد و بر اساس تفکرات رئالیستی خود نسخه اوّلیه منطق‌گرای‌اش را در *اصول*(Principles of Mathematics) مطرح کرد. در این مرحله منطق‌-گرایی راسل را در *اصول* مورد بررسی و مداقه قرار خواهیم داد. راسل در ادامه به دلیل پارادوکسی که در *اصول* با آن مواجه شد از پاره‌ای از تفکرات خام رئالیستی خود عقب‌نشینی کرد و اصلاحاتی در آنها صورت داد. بنابراین می‌توان گفت عقب‌گرد راسل به ایده‌آلیسم اصلاح یافته‌ای که در نوع خود منحصر به فرد است او را قادر ساخت که این پارادوکس را حل کند.

راسل در مرحله بعد نسخه کامل منطق‌گرایی خود را بر اساس ایده‌آلیسم اصلاح یافته خویش در کتاب *مبانی ریاضی* (Principia Mathematica) خود مطرح می‌کند. این طرح به نوبه خود کاستی‌هایی دارد که ریشه در نقاط ضعف مابعدالطبیعه راسل دارد و آخرین مسأله‌ای است که این مقاله پاسخ‌گوی آن است، بنابراین به‌طور کلی در این مقاله قصد داریم جریان فروکاست ریاضیات به منطق را از سوی راسل توصیف و تشریح کنیم و فرایندی که راسل طرح خود را پیش برد به تصویر بکشیم.

پیوندهای اوّلیه ریاضیات و منطق

در قرن هجدهم ریاضی‌دانان به شکاف‌های بسیاری در مفاهیم ریاضیات از جمله حساب دیفرانسیل و انتگرال برخوردند. شکاف‌هایی که ریاضیدانان را در استفاده از مفاهیم آنالیز دچار مشکل می‌کرد. اویلر (Leonhard Euler)و لاگرانژ(Joseph Louis Lagrange) از ریاضیدانان مهم قرن هجدهم بودند که از مفاهیم نادقیق حساب دیفرانسیل و انتگرال استفاده‌های بسیار کردند. بعدها عده‌ای از ریاضیدانان مانند کوشی (Augustin Louis Cauchy)، گاوس (Carl Friedrich Gaus)، وایراشتراس (Karl Weierstras) ، ددکیند (Richard Dedekind) ، بولتسانو (Bernard Bolzano)، ریمان (Bernhard Riemann) و غیره متوجه این شکاف‌ها و ابهامات شدند و در پی اصلاح و رفع آنها برآمدند(Anglin, 1994: 199-203). بنابراین ریاضی‌دانان در پی ارائه تعاریف دقیق از مبانی و مفاهیم ریاضیات برآمدند که با کمک آنها فضای مبهم ریاضیات را شفاف‌سازی کنند و به دنبال آن از نتایج و پیامدهای نادرست برحذر باشند.

از طرفی در قرن نوزدهم با پیدایش اعداد گوناگون نابسامانی‌های فلسفی بسیاری بوجود آمده بود. در ادامه همین جریان تدقیق تعاریف و شفاف‌سازی مبادی و مفاهیم ریاضیات، ریاضی‌دانان قرن نوزدهم نظریه واحدی برای عدد تنظیم کردند و نشان دادند که چگونه می‌توان نظریه‌های ریاضی مربوط به اعداد پیچیده و غامض را به نظریه نوع اصلی اعداد یعنی اعداد طبیعی تبدیل کرد، یا بر اساس آن ساخت. این عمل را «حسابی کردن آنالیز» (arithmetization of analyse) نامیدند، زیرا که موضوع آن ارائه این امر بود که چگونه با افزودن مفاهیمی چند می‌توان آن قسمت‌هایی از ریاضی را که زیر عنوان آنالیز قرار دارند به قسمت مقدماتی حساب (یا به عبارت دیگر به نظریه مقدماتی عدد) تحویل کرد (بارکر، ۱۳۴۹: ۱۱۵). در حادثه «حسابی سازی آنالیز» که می‌توان گفت با تاخیر دو هزار ساله، یعنی از زمان فیثاغورث (۵۹۰ تا۵۰۰ ق.م) و ارشمیدس (۲۸۷تا ۲۱۲ ق.م) تا اواخر قرن نوزدهم صورت گرفت، سرنخ بسیاری از مباحث یافت می‌شود، که از آن جمله تحولات منطق ریاضی، مباحث و نحله-های مختلف در فلسفه ریاضی و بلاخره تحولات در علوم نظری کامپیوتر هستند (لاریجانی، ۱۳۸۰: ۱۰۵). می‌توان گفت جریان منطق‌گرایی که مرحله جدیدی در ساده‌سازی و تدقیق مبانی و مفاهیم ریاضیات محسوب می‌شود ادامه جنبش «حسابی سازی آنالیز» است.

سه دیدگاه مهم قرون وسطایی در مورد کلی‌ها که توسط تاریخ‌دانان با نامهای واقع-گرایی(Realism) و مفهوم‌گرایی(Conceptualism) و نام‌گرایی(Nominalism) مشخص شده‌اند، اساساً به صورت متناظر در قرن بیستم در باب فلسفه ریاضیات تحت نام‌های جدید منطق-گرایی، شهودگرایی(Intuitionism) و صورت‌گرایی(Formalism) ظاهر شدند (کواین، ۱۳۸۶: ص۲۴۳). گسترش یافتن فلسفه عدد بصورت «برنهاد منطق ریاضی» از طرف هواخواهان فلسفه واقع-گرایی امری تصادفی نیست، این دو طرز فکر طبیعی با یکدیگر سازگار و همراه‌اند. مطمئنا اگر هم کسی واقع‌گرا نباشد می‌تواند «برنهاد منطق ریاضی» را بفهمد و بپذیرد، یا کسی واقع‌گرا هم باشد امّا این برنهاد را قبول نکند. امّا واقع‌گرایی است که محرک فکر فرگه و راسل شد و اساس کار آنان را تدارک کرد و اگر آنان پیرو نام‌گرایی، یا مفهوم‌گرایی از نوع فلسفه کانت، یا فلسفه ناجازم دیگری در مورد عدد بودند با احتمال خیلی ضعیف‌تری به وضع و بسط «برنهاد منطق ریاضی» می‌پرداختند(بارکر، ۱۳۴۹: ۱۶۳).

گفتنی است که آنچه نزد ریاضیدانان امروز و فلاسفه ریاضی جدّی گرفته می‌شود روش ریاضی است و آن‌هم عبارت است از روش استنتاجی محض. تقریبا این روش از زمان اقلیدس به نحو کلاسیک و دقیق وجود داشته است. در قرن هجدهم و نوزدهم این روش به نهایت دقت رسید و زمینه برای بحث‌های بنیادی‌تر در ریاضیات و علوم آماده شد. سه نحله مهم در مبانی ریاضی که امروز مطرح هستند یعنی شهودگرایی، صورت‌گرایی و منطق‌گرایی هر یک در ادامه مباحث مهم ریاضی و توجه به روش ریاضی ظهور نمودند. البته باید توجه داشت سه گرایش ذکر شده در مبانی ریاضیات را نمی‌توان صرفا دنباله کاوش‌های فلسفی سابق در باب مبانی ریاضیات دانست، هر چند از آن کاوش‌ها متأثر بوده‌اند(لاریجانی، ۱۳۸۰:ص۱۰۰). با این وصف امروزه منطق‌گرایی یکی از نحله‌های فلسفه ریاضیات است.

در مجموع توسعه ریاضیات در قرن هجدهم و نوزدهم و بخصوص حسابی شدن آنالیز، سبب شد که مفاهیم مختلفی از ریاضیات را بتوان به مفاهیم ساده‌تر و بسیار عمومی‌تر از قبیل فاصله منطقی تعریف نمود. این مسئله باعث شد که گروهی چنین بپندارند که ریاضیات شعبه‌ای از منطق است! و لذا مفاهیم ریاضی باید به کمک مفاهیم منطقی تعریف شوند و قضایای ریاضی هم به عنوان قضایایی در منطق اثبات گردند (لاریجانی، ۱۳۸۰: ۱۰۳).

منطق‌گرایی

ممکن است برخی پیشینه منطق‌گرایی را تا عهد باستان پیش برند. امّا مقصود ما از منطق‌گرایی بیشتر مشمول جریاناتی است که در قرن هجدهم و نوزدهم موجود بود یعنی منطق‌گرایی‌ای که در پیوند با ریاضیات ظهور کرد. در قرن نوزدهم دو جریان منطق‌گرایی قوی وجود داشت که بطور مستقل از هم توسط فرگه و راسل پیش می‌رفت. فرگه بر آن بود که نشان دهد علم حساب قابل تحویل(Reduction) به منطق می‌باشد، بدین صورت که موضوع آن، یعنی اعداد، قابل تعریف بر حسب موضوعات منطقی محض بوده و قضایایش نیز از منطق قابل استنتاج است. پیش از فرگه ریاضیدانان ضمن بررسی‌های خود در مورد وابستگی امور ریاضی بصورت مبهمی این امر را نشان داده بودند که همه مفاهیم علم حساب قابل تجزیه به اعداد طبیعی‌اند (یعنی ۱و۲و۳و... که در شمارش عادی بکار می‌روند). در نتیجه مسئله عمده‌ای که برای منطق‌گرایی باقی مانده بود همانا استخراج اعداد طبیعی از مفاهیم منطقی بود(امید، ۱۳۸۱: ۱۴۱).

پئانو (Giuseppe Peano) دانشمند ایتالیایی، اولین کسی بود که قوانین اصلی اعداد طبیعی را به‌صورت اصل موضوعی سازمان بخشید. اصول موضوعه پئانو را چنین می‌توان بیان کرد: (۱) صفر عددی است طبیعی (۲) تالی هر عدد طبیعی عددی است طبیعی (۳) هیچ دو عدد طبیعی متمایز تالی یکسان ندارند (۴) صفر تالی هیچ عدد طبیعی نیست (۵) اگر خاصه‌ای درباره صفر صادق باشد و اگر در صورت صادق بودن درباره یک عدد طبیعی درباره تالی آن هم صدق کند، درباره همه اعداد طبیعی صادق خواهد بود. هم فرگه و هم راسل و وایتهد عددهای طبیعی را بصورت نوعی مجموعه مجموعه‌ها تعریف کردند. مثلا برای شناساندن یک عدد طبیعی می‌توان گفت "چیزی که متعلق به هر مجموعه‌ای باشد که صفر به آن تعلق دارد و تالی هر مجموعه‌ای که به آن تعلق داشته باشد، نیز به آن تعلق دارد". آنگاه با منطق گسترش یافته‌ای که شامل قوانین مربوط به مجموعه‌ها و زوج مرتب‌ها (یا معادل‌های آن) باشد می‌توان اصول موضوع پئانو و بقیه نظریه اعداد را نتیجه گرفت. فرگه عقیده داشت که فقط

قوانین عدد را می‌توان چنانکه آمد به قوانین منطق تأویل کرد. وایتهد و راسل ادعای بزرگتری داشتند عبارت از اینکه همه ریاضیات را می‌توان به منطق مؤول ساخت(بارکر، ۱۳۴۹: ۱۶۲-۱۶۳).

این عقیده که همه قوانین ریاضیاتِ عدد فقط یا قابل استنتاج از منطق و یا قابل تحویل به منطق هستند به نام «برنهاد منطق ریاضی»(the logictic thesis) شناخته شده است. وایتهد و راسل در کتاب عظیمی که به نام *مبانی ریاضی* تدوین کردند درصدد برآمدند که این برنهاد را بتفصیل مستقر سازند. بر طبق «برنهاد منطق ریاضی» رابطه میان حساب و سایر قوانین عدد با قوانین منطق همانند رابطه میان قضایای ریاضی و اصول موضوعه آن است. اگر درصدد اثبات این مدعا باشیم به دو نکته مهم نیازمندیم: یکی بیانی روشن و صریح از قوانین منطق، دوّم یک سلسله تعاریف از اصطلاحاتی از نظریه اعداد که کلید استخراج قوانین آن از قوانین منطق خواهد بود. این مسئله که قسمتی از ریاضیات را هر چه باشد، از منطق ارسطو استخراج کنیم مطلقا مورد بحث نیست، بلکه یک دستگاه منطق خیلی قوی‌تر مورد نیاز ما است(همان، ۱۶۱-۱۶۰).

سه دوره فکری راسل

جریان منطق‌گرایی راسل را در فلسفه ریاضی می‌توان به سه دوره تقسیم‌بندی کرد. دوره اوّل دوره ای است که تحت تأثیر جو حاکم بر دانشگاه کمبریج راسل دارای تفکرات ایده‌آلیستی است. دوره دوّم دوره‌ای است که راسل به دلیل نابسنده بودن مکتب ایده‌آلیسم در صورت دادن نظام منطقی، از ایده‌آلیسم روگردان می‌شود و فلسفه رئالیستی خود را پایه‌ریزی می‌کند و نسخه اوّلیه‌ای از نظام منطقی خود را در *اصول* می‌آورد. دوره سوّم دوره‌ای است که به دلیل موانع برخاسته در مسیر فروکاست ریاضیات به منطق، راسل به اجبار در مبادی متافیزیکی خود تجدید نظر می‌کند و به ایده‌آلیسم اصلاح یافته‌ای روی می‌آورد که بر اساس آن نسخه نهایی منطق‌گرایی خود را در کتاب *مبانی ریاضی* (Principia Mathematica) ارائه می‌کند.

۱) تفکرات ایده‌آلیستی راسل

دوره نخست تفکرات فلسفی راسل تحت تأثیر جو حاکم بر کمبریج ایده‌آلیستی بود. اثر مهم این دوره *مبانی هندسه*(Foundation of geometry) و «دیالکتیک عدد و کمیت» (On the Relation of Number and Quantity) است. دوره‌ای که راسل دیالکتیک هگل را به زیبایی در کتاب *مبانی هندسه* خود و مقاله «دیالکتیک عدد و کمیت» بازنمایی می‌کند(راسل، ۱۳۸۷، ۶۰-۵۹). در اینجا دیالکتیک روش ترکیب است که برای توجیه نسبت‌های درونی استفاده می‌شود و با جدل کانت فرق دارد.

راسل در این دوره از کانت نیز متأثر است. تأثّر او از کانت در اعتقاد او مبنی بر پیشینی (a priori) بودن برخی گزاره‌های هندسی آشکار می‌شود. پیشینی برای راسل دارای وجه منطقی است نه بنا بر تفسیر او از کانت مبتنی بر شیوه ذهنی و بنابراین روانشناختی(Hylton, 1990: 77). منظور راسل از امر پیشینی امری است که به طور منطقی در تجربه از پیش فرض شده است یا اینکه برای امکان هر معرفتی لازم است(Russell, 1897: 2-3).

یکی دیگر از آثار راسل در این دوره *شرحی بر فلسفه لایبنیتس* (A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz) است. نگاه راسل به فلسفه لایبنیتس به‌گونه‌ای خاص است. به

زعم او لایبنیتس کل فلسفه خود را از تعدادی اصول موضوعه استنتاج کرده است. لایبنیتس یکی از بنیانگذاران منطق ریاضی بشمار می‌آید و معتقد بود که نظام‌های ریاضی می‌توانند قالب خوبی برای مبانی تفکر باشند. راسل از نگاه لایبنیتس در درک اهمیت منطق در فلسفه و در ریاضیات متأثر است .از طرفی راسل لایبنیتس را نقد می‌کند و در تقابل با او که همه گزاره‌ها را تحلیلی می‌دانست اعتقاد داشت که تمام گزاره‌ها تحلیلی-ترکیبی‌اند، و علی‌رغم لایبنیتس که به نسبت‌های درونی معتقد بود راسل به نسبت‌های خارجی که عینی هستند باور داشت(راسل، ۱۳۹۰: ۶-۳).

در این دوره راسل معتقد است که ریاضیات وابسته به زمان و مکان است. توضیح مطلب این است که راسل معتقد بود که ما به لحاظ منطقی در تجربه، زمان و مکان را پیش‌فرض می‌گیریم و مثلا هندسه که مطالعه حرکت در مکان انتزاعی با امکان صرف تنوع است باید وابسته به شهود زمان و مکان باشد. راسل در این دوره مدعی نبود که صدق ریاضیات نیز مانند منطق عام و ضروری است و همچون هگل معتقد بود که ریاضیات و بنابراین هندسه بدلیل این که علمی است انتزاعی نهایتا به تناقض برمی‌خورد (Hylton, 1990: 72). هر چند در *مبانی هندسه* تلاش بسیار کرد تا نشان دهد که تناقضات هندسه را با اتخاذ سوژه‌ای فراگیرتر در جریان دیالکتیکی می‌توان از میان برداشت. امّا همچنان به نتایج مخالف آن رسیده بود و نهایتا موفق به نشان دادن این امر نشده بود (Hylton, 1990: 115). این نشان می‌دهد که راسل در این دوره نیز به دنبال اثبات سازگاری و انسجام هندسه و به تبع آن ریاضیات بود.

او اعتقاد داشت که صدق‌های ریاضی نسبی‌اند و کلیت ندارند و تنها با اعمال محدودیت‌هایی می‌توان در مورد صدق و کذب گزاره‌های آن سخن گفت. چنانکه در هندسه معتقد بود که ما بطور پیشینی می‌دانیم که فضا دارای انحنا است ولی با تجربه باید بدانیم که این انحنا صفر است، مثبت است یا منفی. بنابراین برای این‌که بتوانیم گزاره‌های معناداری در علم هندسه بیان کنیم باید گزاره‌های ما شرطی باشند وگر نه به تناقض برمی‌خوریم(Hylton, 1990: 84-85). در واقع ما با مقدمه گزاره شرطی خود اعمال محدودیت می‌کنیم و این جواز ما برای بیان تالی که قضیه‌ای است در هندسه می‌باشد. مثلا می‌گوییم «اگر انحنای فضا صفر باشد آنگاه مجموع زوایای یک مثلث ۱۸۰ درجه است» و نمی‌گوییم «مجموع زوایای مثلث ۱۸۰ درجه است».

۲) تفکرات ضد ایده‌الیستی راسل

دوره دوّم دوره‌ای است که راسل در تقابل با ایده‌آلیسم، فلسفه رئالیستی خود را شکل می‌دهد که هایلتن مفسر بنام راسل آنرا «اتمیسم افلاطونی» می‌نامد. به نظر می‌رسد دلیل اینکه هایلتن چنین نامی به فلسفه راسل می‌دهد بخشی به این جهت است که مابعدالطبیعه عین‌محور راسل برخلاف ایده‌آلیسم همه گزاره‌های جزئی را دارای ضرورت می‌داند به این معنا که آنها دارای صدق و کذب مطلق هستند و هر عینی مستقل از دیگری وجود دارد. علی‌رغم وحدت‌گرایی[2] که به وحدت فراگیر چیزهای کثیر از کانال نسبت‌های درونی معتقدند، چیزهای مجزای بسیاری وجود دارند و کثرت موجودات در جهان واقعی است. این معنایی است که از اتمیسم فلسفه راسل در نظر داریم(Russell, 1903: xviii). و بخش دیگر به این جهت است که راسل هر حدی را دارای هستی می‌داند، حتی کوه طلا یا پادشاه فرانسه هستی دارند اگر چه نتوانسته‌اند با وجود ارتباط برقرار کنند و این یادآور نگاه افلاطونی به موجودیت‌هاست(Russell, 1903: 427).

از دیدگاه راسل ایده‌آلیسم دارای مؤلفه‌هایی است که برای ارائه نظامی سازگار از ریاضیات نابسنده است. ایده‌آلیست‌ها ادعا کرده‌اند که هر دانش غیرمابعدالطبیعی اگر بطور مطلق و بدون محدودیت در نظر گرفته شود دارای ناسازگاری و تناقض خواهد بود. راسل فکر می‌کرد که در مورد ریاضیات این ایده را به طور قطع و واضح می‌توان رد کرد، و ایده تحویل ریاضیات به منطق برای تحقق چنین امری بود(Hylton, 1990: 114-115). دلیل مبنای راسل این بود که منطق، نظامی خودسازگار است که اصول موضوعه آن بدیهی است و دارای صدق‌های مطلق و جهان شمول است. حال اگر ریاضیات به منطق تحویل شود گزاره‌های آن دارای صدق مطلق خواهند بود و چنین ریاضیاتی می‌تواند نظریات سازگاری ارائه کند(Hylton,1990: 200-201).

از مواضع ایده‌آلیستی که راسل به نقد آنها می‌پردازد می‌توان به مراتب حقیقت، صدق یا کذب نسبی گزاره‌های جزئی، نسبت‌های درونی، ذهنی بودن گزاره‌ها، تحلیلی بودن گزاره‌ها، گزاره‌های موضوع-محمولی، وحدت‌گرایی، معرفت متمایل به حکم و مفهوم جوهر اشاره کرد. راسل به مراتب حقیقت معتقد نیست و به نظر وی گزاره‌ها اعیان مستقل از هم‌اند وهیچ کدام دیگری را پیش‌فرض نمی‌گیرند. گزاره-های جزئی دارای صدق و کذب مطلق‌اند. نسبت‌های درونی تنها نسبت‌های موجود نیستند، و گزاره‌ها شامل نسبت‌های خارجی و واقعی هستند بنابراین نمی‌توانند ذهنی باشند، گزاره‌ها عینی و غیر ذهنی هستند. معرفت متمایل به حکم نیست، که ساختاری داشته باشد و پیش‌فرض‌هایی را اعمال کند. معرفت از طریق آشنایی(Acquaintance) است و صدق گزاره‌ها بی‌واسطه حاصل می‌شود. دلالت غیر ضروری است یعنی هیچ شکافی بین فکر ما و موضوعش یا بین گزاره و مدلولش نیست.

گزاره‌های منطق و ریاضیات ترکیبی پیشینی هستند. "... منطق ترکیبی است چون هر چیزی چنین است، و پیشینی است چون حقایق آن با چشم ذهن درک می‌شوند و نه چشم فیزیکی و از دیدگاه راسلی تمام آنچه در این باره می‌توان گفت همین است"(Hylton, 1990: 197) راسل در این دوره با اتکا به «اتمیسم افلاطونی» تقریر اوّلیه طرح فروکاست ریاضیات به منطق را در کتاب *اصول* خود می‌آورد او در فلسفه «اتمیسم افلاطونی» خود به دو اصل مشخصی معتقد است که سبب‌ساز پارادوکس‌های بسیاری از جمله «پارادوکس مجموعه‌ها» و «پارادوکس محمول‌ها» می‌شود. این دو اصل عبارتند از: ۱) هر حدی می‌تواند موضوع گزاره صادق باشد. ۲) پایگان هستی شناختی تمام موجودات یکسان است(Hylton, 1990: 227). توضیح مطلب این است که قرار گرفتن برخی مفاهیم نابسنده در جایگاه موضوع با مشخصه موضوعیت داشتن در تضاد است(موحد، ۱۳۸۷: ۳۵-۳۳). مثلا فرض کنیم «خود نامصداق» را به عنوان موضوع لحاظ کنیم. همین که چیـزی را بیان کنیم به آن وجود و مصـداقیت بخشیده‌ایم، حال آنکه با قرار گرفتن مفهوم «خود نامصـداق» در جایگاه موضوع عمل مصداق بخـشیدن را نقض می‌کنیم. یا مثلا در پارادوکـس دروغگـو «مردی می‌گوید "من دروغ می‌گویم"»، هر دو گزاره «مردی می‌گوید "من دروغ می‌گویم"» و «من دروغ میـگویم» پایگان هستی‌شناختی یکسانی دارند و بنابراین صدق و کذب آنها به یک سان تعریف می‌شود و در این صورت است که صدق و کذب گزاره اوّلی کذب و صدق دوّمی را موجب می‌شود و تناقـض پیش می‌آید (Hylton, 1990: 302).

یکی از مسائل راسل در این دوره ارائه تعریفی از مفهوم بی‌نهایت است مثلا ارائه معنا واژه «هر» که در هر گزاره‌ای بیاید دلالت بر یک شی مرکب نامتناهی دارد(Hylton, 1990: 72). متعاقب آن

راسل تعریفی از متغیر[۳] و تابع گزاره‌ای[۴] ارائه می‌کند. ما در ریاضیات با کمک واژه «هر» و متغیرها و توابع گزاره‌ای عمومیت‌های معتبر برقرار می‌کنیم بنابراین این‌ها موجودیت‌های ریاضیاتی هستند که باید تعاریف دقیقی از آنها ارائه داده شود. راسل برای این منظور «نظریه مفاهیم توصیفی» (theory of denoting concepts) را اتخاذ می‌کند. این نظریه می‌گوید هر گزاره شامل مفهوم توصیفی، در مورد خود مفهوم توصیفی نیست بلکه در مورد مدلول آن است. به بیان راسل: "یک مفهوم اگر در گزاره باشد هنگامی توصیفی است که گزاره در مورد آن مفهوم نباشد بلکه درباره حدّی باشد که به طریقه خاصی به آن مفهوم مرتبط است" (Hylton,1990: 56). او قصد دارد تا با کمک مفاهیم توصیفی به تعریفی از متغیر وتابع گزاره‌ای برسد. تابع گزاره‌ای، گزاره‌ای است که یک حد نامتعین دارد مثل «هر انسانی فانی است». ما می‌دانیم که طبق این گزاره هر انسانی را در نظر بگیریم فانی است ولی مشخصا کدام انسان نمی‌دانیم. بنابراین این گزاره در مورد مفهوم توصیفی هر« انسان» نیست بلکه در مورد مدلول‌های آن است.

علی‌رغم تلاش بسیار راسل، تعاریف ارائه شده در گزاره‌های پیچیده کارایی نداشتند و نهایتاً راسل متغیر و تابع گزاره‌ای را مفاهیم بنیادی لحاظ می‌کند(Russell, 1903: 82). از طرفی "یک حد تنها زمانی یک مفهوم توصیفی است که وجود آن حد در گزاره منجر به درباره آن حد بودن نشود، بلکه منجر به درباره حدی دیگر (یا ترکیبی از حدود) بودن شود. این مفهوم «درباره چیزی بودن» (aboutness)[۵] در سیاق «اتمیسم افلاطونی» یک بدعت است"(Hylton, 1990: 208). راسل در مابعدالطـبیعه عین‌محـور خود بر این بود که گزاره‌ها اعـیانی هستند که در میان موجودیـت‌های دیگر قرار دارند. خود گزاره عینی و غیرذهـنی است که بی‌واسـطه به صدق و کذب آن پی می‌بریم. وهیچ شکـافی در معـرفت ما از گزاره و خود گزاره وجود ندارد. امّا طبق «نظـریه مفاهـیم توصیفی» این بی‌واسطگی و یکپارچگی در گزاره‌های دارای مفاهیم توصیفی از میان برمی‌خیزد زیرا صدق گزاره دارای مفهوم توصیفی وابسته به گزاره دیگری خواهد شد که شامل مدلول گزاره مذکور است (Hylton, 1990: 108-110). بدعت دیگری که به موجب این نظریه بر علیه مابعدالطبیعه راسل پیش می‌آید این است که راسل در اتمیسم افلاطونی معتقد است که هر گزاره‌ای شامل اجزای خود است. مثلا گزاره «سقراط خردمند است» سقراط و خردمند را دربر می‌گیرد ولی گزاره «معلم افلاطون خردمند است» شامل «معلم افلاطون» نیست(Hylton, 1990: 207). با فرض این نظریه ناخواسته بین معنا یعنی مفهوم توصیفی و مدلول تمایز ایجاد می‌شود و راسل در پی ارائه توضیحی موجّه در باب رابطه معنا با مدلول برمی‌آید.

خلاصه راسل علی‌رغم اینکه برای تبیین متغیر و توابع گزاره‌ای از «نظریه مفاهیم توصیفی» سود می‌جوید امّا بخاطر کاستی‌های این نظریه از آن صرف‌نظر می‌کند و بعدها نظریه دیگری در باب دلالت ارائه می‌کند که نظریه مشهور او یعنی «نظریه توصیفات»(On Denoting) می‌باشد. که در آن با ارائه "تحلیل به مثابه حذف"(Unalysis Elimination) تمایز بین معنا و مدلول از میان می‌رود.

پس راسل در این دوره معتقد است که ریاضیات صدق عام دارد وگزاره‌های ریاضی صدق مطلق دارند. تمام موجودیت‌های ریاضی پایگان هستی شناختی یکسان دارند و بنابراین یک مفهوم واحد از صدق داریم. بدلیل استفاده از «نظریه مفاهیم توصیفی» صدق گزاره‌های شامل مفاهیم توصیفی بی-واسطه نیست. گزاره‌های منطق و ریاضی ترکیبی پیشینی هستند. منطق خودبسنده است و هیچ پیش-

فرضی ندارد بنابراین مبتنی بر هیچ علمی نیست و به دنبال آن ریاضیات هم صدق جهان شمول دارد و در نظریاتش تناقض راه ندارد که در سیر دیالکتیکی به موضوعی فراگیرتر رهنمون شود. اعداد به عنوان موجودیت‌های مستقل ریاضی به کمک مجموعه‌ها که وجود مستقل دارند تعریف می‌شوند. " اعداد طبیعی بطور خاص مجموعه‌های مجموعه‌هایی هستند که همه‌شان تعداد اعضای یکسانی دارند، یعنی «مشابه» هستند، و مفهوم مشابهت به‌گونه‌ای تعریف شده است که مفهوم عدد را پیش‌فرض نمی‌گیرد" (Russell, 1903: 109-111).

۳. ایده‌الیسم اصلاح یافته راسل

دوره سوّم دوره شبه ایده‌آلیستی راسل است. دوره‌ای که راسل برای از میان برداشتن مشکلات طرح فروکاست ریاضیات به منطق در برخی مواضع خام «اتمیسم افلاطونی» خود تجدید نظر می‌کند و به نوعی در برخی جنبه‌های تفکر فلسفی خود دیدگاه اصلاح شده‌ای از ایده‌آلیسم را مطرح می‌کند. یا به بیان دیگر برای از میان برداشتن برخی مشکلات نظری طرح فروکاست از برخی مواضع خود عقب نشینی می‌کند، بدون اینکه جایگزینی ارائه کند؛ فقط برای این‌که جنبه‌های فنی منطق‌گرایی خویش را پیش ببرد. اثر مهمی که عمده تمرکز و ارجاعات ما در این دوره به آن است کتاب *مبانی ریاضی* راسل است.

راسل بعد از *اصول* و کمی قبل از «نظریه توصیفات»، دچار چرخش فکری می‌شود که اوّلین بار در"نظریه توصیفات" مطرح می‌کند. او به جای «نظریه مفاهیم توصیفی» «نظریه توصیفات» را به عنوان نظریه دلالت جایگزین می‌کند. طبق این نظریه باید بین نام‌های خاص و وصف‌ها تمایز گذارد. وصف مختص عبارتی است که یک اسم مفرد را مشخص می‌کند و از آن می‌توان برای یاد کردن، ارجاع، یا مشخص کردن دقیقا یک شخص، یک چیز، یا یک جا بهره گرفت. راسل استدلال می‌کند علی‌رغم این‌که گاهی وصف‌های مختص و نام‌های خاص به یک فرد یا جای واحد اشاره می‌کنند کارکرد منطقی‌شان متفاوت است. در واقع عبارت‌های توصیفی را می‌توان به گونه‌ای معنادار به‌کار برد بدون اینکه چیز یا شخص معینی را مشخص کنند(استرول، ۱۳۸۷، ۳۳-۳۲). راسل در «نظریه توصیفات» به جای استفاده از مفهوم توصیف یا مفاهیم توصیفی از مفاهیم بنیانی و غیرقابل‌تعریف مفهوم‌هایی چون متغیر و تابع گزاره‌ای استفاده می‌کند زیرا با اعمال «تحلیل به مثابه حذف» بر گزاره‌ها چیزی جز توابع گزاره‌ای، متغیر و ادات منطقی باقی نمی‌ماند. برای مثال با اعمال تحلیل بر جمله «پدر چارلز دوّم اعدام شد» داریم:

[(y=x⊃ اگر y چارلز دوّم را بوجود آورد) (y) & xاعدام شد x & چارلز دوّم را بوجود آورد](x)[۵]

از گزاره بالا آنچه پس از تحلیل می‌ماند متغیرهای x و y و توابع گزاره‌ای «x چارلز دوّم را بوجود آورد»، «xاعدام شد» ،«اگر y چارلز دوّم را بوجود آورد» و «y=x» و موجودیت‌های منطقی است (Lackey, 1981: 104-105).

راسـل در برخی از دیـدگاه‌های هسـتی‌شناختی خود نیـز تغییـراتی اعـمال کرد مثـلا تمـایز وجـود و هسـتی، به تـمایز موجودیـت‌های زمانـی مـکانی و موجـودیت‌های غیرزمـانی و غیرمکانی تبـدیل می‌شـود مانند موجودیـت‌های ریاضی یا گزاره‌ها که واقـعی امّا غیرزمانی و غیرمـکانی هستند (Hylton, 1990: 243.) بعلاوه راسل اوّلین بار تمایز معرفت از طریق آشنایی و معرفت از طریق توصیف را خارج از سیاق ریاضیات مطرح می‌کند. ما با گزاره‌هایی که عین‌های خود را در بردارند از

طریق آشنایی مستقیم معرفت داریم و با گزاره‌هایی که شامل وصف‌ها هستند از طریق توصیف (Hylton, 1990: 244-245).

دستاوردهایی که برای جریان منطق‌گرایی در این دوران چرخش فکری راسل حائز اهمیت است «نماد ناکامل»(incomplete symbol) و «تحلیل به مثابه حذف» است. ارتباط مستقیم هدف راسل از ارائه «نظریه طبقات»(theory of type) با مفهوم «نماد ناکامل» بود که اوّلین بار راسل آن را در زمینه «نظریه توصیفات» ارائه کرد. راسل برای رهایی از فرض وجود مجموعه‌ها و مسائل پیش-آمده از آن تعریف«نماد ناکامل» را ارائه می‌کند. در این حالت مجموعه‌ها به توسط«نماد ناکامل» به توابع گزاره‌ای ارجاع داده می‌شوند. از طرف دیگر به کمک «تحلیل به مثابه حذف» و تکنیکی که این تحلیل اعمال می‌کند، می‌توانیم ببینیم گزاره‌هایی که ظاهراً شامل موضوعاتی هستند در واقع بعد از اعمال تحلیل تنها شامل متغیرها و توابع گزاره‌ای و ادات منطقی می‌باشند (Hylton, 1990: 265).

مبانی ریاضی شامل بسیاری از مسائل حل نشده از جمله مسئله ناشی از پارادوکس راسل است. دو نوع مسئله‌ای که از پارادوکس راسل ناشی می‌شود در این کتاب به صورتی پیوسته به هم مورد بررسی قرار گرفته‌اند:

۱) همانگونه که قبلا اشاره کردیم راسل برای حل پارادوکس‌ها این ایده را که همه موجودیت-ها اعیانی با پایگان هستی‌شناختی یکسان هستند کنار می‌گذارد. نظریه‌ای که راسل در *مبانی ریاضی* به توسط آن تمایزات مقوله‌ای را ارائه می‌دهد «نظریه طبقات» نام دارد که اوّلین بار در مقاله «منطق ریاضی بر مبنای نظریه طبقات» (Mathematical Logoc as Based on the Theory) ارائه می‌شود و در *مبانی ریاضی* شکل اصلی خود را می‌یابد. "راسل در این آثار به تمایزات مقوله‌ای بین توابع گزاره‌ای و افراد (پایین‌ترین مرتبه در نظریه انواع) و همچنین میان انواع توابع گزاره‌ای قائل می‌شود"(Hylton, 1990: 282).

۲) قبلا دیدیم که پارادوکس راسل سازگاری مفهوم مجموعه را زیر سوال می‌برد و از طرفی استفاده از این مفهوم ناگزیر می‌نماید. راسل با تغییراتی که در رویکرد خود در باب توصیف اتخاذ می‌کند می‌تواند از فرض وجود مجموعه‌ها و بنابراین مسائل منتج از آن رهایی پیدا کند. یعنی ما می‌توانیم بدون فرض وجود مجموعه‌ها درباره آنها گزاره‌هایی معنادار چه صادق و چه کاذب بیان کنیم. او در *مبانی ریاضی* از ایده تعریف در زمینه یا تعریف سیاقی استفاده می‌کند تا نشان دهد که فرض وجود مجموعه‌ها غیرضروری است: "به این طریق که نمادهایی را که ظاهرا بر مجموعه‌ها دلالت دارند می‌توان نمادهایی ناکامل تصور کرد و در سیاق بر مبنای توابع گزاره‌ای تعریف‌شان کرد یا توضیح‌شان داد"(Ibid). از این‌رو تمایزات مقوله‌ای میان توابع گزاره‌ای بطور خودکار به مجموعه‌ها نیز منتقل می‌شوند و بنابراین مانع پارادوکس راسل و مشابه‌های آن می‌شوند.

۱.۳. "اصل موضوع تحویل پذیری" و "اصل موضوع بی‌نهایت"

"بنا به «نظریه طبقات» راسل، توابع گزاره‌ای که می‌توانند عینی فرضی را به عنوان شناسه قبول کنند خود از مراتب متنوع، و از این‌رو از طبقات متنوعی هستند. نمونه‌ای از این امر را در مقایسه بین «xشجاع است» و «xهمه خصوصیت‌های یک ژنرال خوب را داراست» می‌بینیم. هر دو توابع گزاره‌ای یک مکانه هستند که در مورد نوع بشر به کار رفته‌اند (چه صادق چه کاذب)، امّا آنها خود از

مراتب متفاوت و از آنرو از طبقات متفاوت هستند.[۷] از این‌رو ما از تعمیم بر روی همه توابع گزاره‌ای یک مکانه که (مثلا) نوع بشر را به عنوان شناسه می‌پذیرند منع می‌شویم"(Hylton, 1990: 307). ولی از طرف دیگر برای فروکاست ریاضیات به منطق باید بتوانیم آنرا بر مجموعه‌های دل‌بخواهی که یک عین فرضی می‌تواند بطور معناداری عضو آنها باشد، تعمیم دهیم. به عبارت دیگر باید قادر باشیم بر توابع گزاره‌ای که عینی مفروض را به عنوان شناسه می‌گیرند تعمیم دهیم. برای مثال این اصل موضوع اعداد طبیعی را در نظر می‌گیریم: "اگر خاصه‌ای درباره صفر صادق باشد و اگر در صورت صادق بودن درباره یک عدد طبیعی درباره تالی آن هم صدق کند درباره همه اعداد طبیعی صادق خواهد بود"(بارکر، ۱۳۴۹: ۱۱۷). ما نیاز داریم برای تعریف اعداد طبیعی به کمک صفر و تالی بگوییم که «x یک عدد طبیعی است اگر دارای «همه» خصوصیت‌هایی است که صفر دارای آن است و همچنین تالی هر عینی که دارای آن است نیز آن را داراست»(Ibid). این تابع گزاره‌ای، توابعی مربوط به صفر و تالی را پیش‌فرض گرفته است و بنابراین خود از مرتبه‌ای بالاتر از توابعی است که پیش‌فرض گرفته است. راسل برای حل این مسائل «اصل موضوع تحویل‌پذیری»(the axiom of reducibility) را به نظریه منطقی خود می‌افزاید. "«اصل موضوع تحویل‌پذیری» تصدیق می‌کند که برای هر تابع گزاره‌ای قطعا یک تابع گزاره‌ای حملی هم مصداق، وجود دارد"(Ibid, 309).

در این اصل موضوع، تابع گزاره‌ای را حملی گویند که در پایین‌ترین مرتبه و طبقه سازگار با آن شناسه‌ای باشد که می‌گیرد و بنابراین تعمیم بروی توابع گزاره‌ای حملی اعمال‌پذیر بر روی یک عین مفروض می‌تواند نقش تعمیم بر روی همه توابع گزاره‌ای اعمال‌پذیر بر آن عین را ایفا کند.

یک مسأله دیگر که از «نظریه طبقات» در مبانی ریاضی ناشی می‌شود مربوط به وجود تعداد بی‌نهایت موجودیت است که حتی برای بخش‌های ابتدایی ریاضیات هم لازم است. راسل اعداد طبیعی را به عنوان موجودیت‌های مستقل ریاضیاتی فرض نمی‌گیرد بلکه سعی می‌کند چنانکه در اصول آورده است آنها را بطور منطقی بر اساس مجموعه‌ها تعریف کند. "اعداد طبیعی بطور خاص مجموعه‌های مجموعه‌هایی هستند که همه‌شان تعداد اعضای یکسانی دارند، یعنی «مشابه» هستند، و مفهوم مشابهت به‌گونه‌ای تعریف شده است که مفهوم عدد را پیش‌فرض نمی‌گیرد" (Russell, 1903: 109-111). "چه افراد وجود داشته باشند چه وجود نداشته باشند، مجموعه تهی وجود خواهد داشت، یعنی مجموعه‌ای که شامل هیچ عینی نباشد. مجموعه‌ای که فقط شامل مجموعه تهی باشد عدد صفر است (تنها مجموعه‌ای که مشابه تهی است خودش است). حال که عدد صفر وجود دارد، حداقل یک مجموعه یک عضوی وجود دارد که شامل تنها صفر است. از این‌رو عدد یک را می‌توان به عنوان مجموعه‌ای که شامل این مجموعه یک عضوی نمونه‌ای و همه مجموعه‌های مشابه آن باشد تعریف کرد. و به این ترتیب، مجموعه‌ای که تنها شامل صفر و یک باشد به عنوان مجموعه نمونه‌ای دو عضوی عمل کرده ما را قادر به تعریف عدد دو می‌کند و همین‌طور تا آخر[۸]»(Hylton, 1990: 318).

استدلال مشابهی در *مبانی ریاضی* وجود دارد که متضمن صعودی نامحدود در سلسله مراتب است. راسل می‌گوید:

> مجموعه تهی از طبقه یک است؛ مجموعه‌ای که تنها شامل آن است –یعنی عدد صفر– از این‌رو از طبقه دو است. عدد یک مجموعه‌ای است که شامل (شاید به اضافه چیزهای دیگر) مجموعه‌ای است که تنها عضوش عدد صفر است؛ از این‌رو عدد یک، یک مجموعه از طبقه چهار است به همین ترتیب، عدد دو از طبقه شش خواهد بود و...»(Ibid).

بنابراین فقط تعداد محدودی از اعداد در هر طبقه موجود خواهند بود و بنابراین در آن طبقه اثبات خواهند شد و تنها در فراتر از طبقات محدود است که می‌توان وجود تعداد نامتناهی از موجودیت‌ها را اثبات کرد. از طرفی راسل در *مبانی ریاضی* می‌گوید: «چون ما تنها مرحله به مرحله مراتب توابع گزاره‌ای را تعریف می‌کنیم، در این صورت پیشروی ما حدی نخواهد داشت و توابع گزاره‌ای مراتب بی‌نهایت نمی‌توانند اتفاق بیافتند»(Russell, 1927: i.53). با این وصف راسل در *مبانی ریاضی* راهی برای اثبات وجود تعداد نامتناهی از موجودیت‌ها ندارد و طبق این نظام نمی‌توانیم وجود تعدادی کافی از اعداد را برای ساختن نظریه اعداد اثبات کنیم .راسل در پاسخ به این مسأله «اصل موضوع بی‌نهایت» (the axiom of infinity) را به عنوان یک فرضیه وجودی مطرح می‌کند. لازم به ذکر است که این اصل موضوع، اصل موضوعی از *مبانی ریاضی* نیست و یک نوع اظهار یا حکم است که وجود یک مجموعه نامتناهی را تضمین می‌کند و "به عنوان یک فرضیه پیشنهاد می‌شود[یعنی به عنوان مقدم یک شرطی گرفته می‌شود] وقتی که مناسب است"؛ از این‌رو آنچه *مبانی ریاضی* ما را قادر به اثبات آن می‌سازد، در بسیاری موارد، خود یک قضیه ریاضیاتی نیست بلکه یک شرطی است که مقدمش «اصل موضوع بی‌نهایت» و تالی‌اش قضیه مورد نظر است(Russell, 1927: ii.183).

لازم به ذکر است حتی تا ویرایش‌های آخر *مبانی ریاضی* ما پرداخت فلسفی پروپیمانی از راسل سراغ نداریم و اینها تنها به یک دلیل قابل اغماض است و آن این است که جامعه ریاضیدانان بسیار بی‌صبرانه در انتظار طرح سازگاری -بیشتر از لحاظ فنی- فروکاست ریاضیات به منطق از سوی راسل و وایتهد، بخصوص راسل بودند. می‌گویم بخصوص چون راسل در دوره‌هایی که ظاهراً این طرح به دلیل مشکلات «نظریه طبقات» متوقف شده بود به تنهایی در حل این مشکلات کوشید و فقط بعدها بود که رمزی(Frank Plumpton Ramsey) و دیگران به او ملحق شدند.

راسل همچنان در این دوره هم بر این عقیده است که منطق و بنابراین ریاضیات صدق جهان شمول دارد. منطق و موجودیت‌های ریاضیاتی در این دوره دارای مراتب هستند و هر مرتبه‌ای صدق خود را دارد و مثلا صدق وکذب در طبقه‌ای به طبقه دیگر سرایت نمی‌کند(Hylton, 1990: 302-313). گزاره‌های ریاضی ترکیبی پیشینی هستند و گزاره‌های منطق تحلیلی پیشینی (البته این نظر را راسل بعد از نقد ویتگنشتاین(Ludwig Josef Johann Wittgenstein) اتخاذ می‌کند) (Griffin, 2003: 242). اعداد به کمک مجموعه‌ها که از فرض وجود مستقل آنها صرف نظر شده است تعریف می‌شوند. گزاره‌های شامل وصف‌ها صدق با واسطه دارند یعنی از طریق توصیف صادق‌اند. امّا گزاره‌هایی که اجزاء خود را دربردارند صدق بی‌واسطه دارند.

نتیجه‌گیری

پرسش فلسفی از ریاضیات از دوره یونان باستان با نظریه ساخت ریاضی عالم توسط فیثاغورث و به دنبال آن با طرح نظریه عالم خاص ریاضی به وسیله افلاطون و رد آن توسط ارسطو، مطرح شده است.

اما چنین تاملاتی در باب فلسفه ریاضیات عمدتاً صبغه متافیزیکی به معنای هستی‌شناسی داشته اند. در دوره فلسفه اسلامی، با طرح نظریه اقسام معقولات و در قرون وسطای مسیحی، با طرح مساله کلیات، فسفه ریاضی اندکی صبغه معرفت شناختی نیز به خود می‌گیرد. از قرن هجدهم با ظهور ایمانوئل کانت رویکرد استعلایی به ریاضیات شکل می‌گیرد. از این دیدگاه ریاضیات ریشه در شهودات استعلایی مکان (به عنوان منشأ هندسه) و زمان (به عنوان منشأ حساب) دارد. چنین تلاش‌های تبیینی، خواه هستی-شناختی یا معرفت‌شناختی یا استعلایی کلا فارغ از رویکرد صوری و منطقی به ریاضیات بوده‌اند. بدین معنا که خالی از فرمول‌بندی ریاضی و گام‌های ریاضی و صوری برای پیوند ریاضیات با ریشه‌های خود بودند. این گام از قرن نوزدهم توسط پئانو، بول، فرگه و وایتهد و به ویژه راسل برداشته شد. فلسفه ریاضی راسل به دنبال تاسیس یک فلسفه ریاضی توسط یک ریاضیدان و برای ریاضیدانان بود. و بنابراین عزم فرمولیزه کردن و صورت‌بندی مبنای فلسفی نیز در آن وجود داشت.

اما راسل برای تبیین ریاضیات سه دوره متوالی را پشت سر نهاد: ایدالیستی، رئالیستی و شبه ایدالیستی. مهم‌ترین تفاوت و تمایز میان این سه دوره عبارت از بی‌بنیادی صوری، فقدان جهان‌شمولی و صدق مطلق و سازگاری در ریاضیات در دوره ایدالیستی و وجود نقطه مقابل آنها در دو دوره دیگر است.

در نهایت راسل در دوره متاخر فلسفه ریاضی خویش بر این نظر می رود که منطق جهان شمول و متشکل از صدق‌های مطلق یا عام، مشتمل بر متغیرها و ثابت‌های منطقی، با عمومیتی نامحدود است. در مقابل این ادعای ایده‌آلیستی که هر دانش غیرمابعدالطبیعی اگر به‌طور مطلق و بدون محدودیت در نظر گرفته شود دارای ناسازگاری و تناقض خواهد بود، راسل اعتقاد دارد که ریاضیات دانشی غیرمابعدالطبیعی است که به‌طور مطلق دارای سازگاری است که احتیاجی به اثبات سازگاری آن نیست و اصول موضوعه آن بدیهی هستند. ایده فروکاست ریاضیات به منطق روشی است که راسل به توسط آن به این امر دست می‌یابد. بنابراین فروکاست ریاضیات به منطق نشان می‌دهد که ریاضیات نیز شامل صدق‌های مطلق است. این نتیجه پایه‌ای برای استدلال علیه ایده‌آلیسم محسوب می‌شود.

مابعدالطبیعه‌ای که راسل در اصول به آن تکیه دارد «اتمیسم افلاطونی» است. اما فراموش نکنیم که صفت افلاطونی ناظر به عالم متعینی برای حقایق ریاضی نیست و به علاوه بر حسب فرمول بندی دقیق صوری و ریاضی است. در ادامه اصول فلسفی راسل مسبب پیدایش پارادوکسی در *اصول* می‌شود که حل این پارادوکس از سوی راسل به نوبه خود منشأ «تئوری طبقات» در *مبانی ریاضی* می‌گردد .«نظریه طبقات» تمایزی هستی‌شناختی بین موجودیت‌ها اعمال می‌کند. از این طریق راسل موفق به تبیین تصدیق نامتعین یعنی تعریف متغیر و توابع گزاره‌ای می‌شود. «نظریه طبقات» به نوبه خود موجب دشواری‌هایی می‌شود و این ضرورت را پیش آورد که «اصل موضوع تحویل‌پذیری» و «اصل موضوع بی‌نهایت» را به عنوان بخشی از منطق بپذیریم. ارائه «نظریه طبقات» نوعی عقب نشینی از موضعی است که راسل بر علیه ایده‌آلیسم اتخاذ کرده بود. زیرا او برای حل پارادوکس به قبول تمایزات هستی-شناختی و مراتب موجودیت‌ها تن در می‌دهد. اما این نوعی عقب‌گرد به همان موضع ایده‌آلیستی محسوب می شود که راسل در ابتدا «اتمیسم افلاطونی» خود را در تقابل با آن شکل داد.

پی‌نوشت‌ها

۱- اصل عدم تناقض یا اصل امتناع و ارتفاع نقیضین می‌گوید محال است در آن واحد یک قضیه و نقیض آن هر دو صادق و یا هر دو کاذب باشند.

۲- (Monism) اصطلاحی برای دلالت بر این آموزه است که یک و فقط یک جوهر وجود دارد و اشیاء جزئی نه جواهر بلکه صورت‌هایی از همان جوهر واحد هستند.

۳- متغیر نمایانگر ماهیت عمومی و متغیر گزاره است مثلا در گزاره «هر x بچه‌زا است» x متغیر گزاره است که دلالت به عموم پستانداران دارد از طرفی ماهیت متغیر دارد چون هنوز معلوم نیست کدام پستاندار.

۴- راسل می‌گوید: "منظور ما از تابع گزاره‌ای چیزی است که شامل متغیرx است و همین که مقداری به x داده شود یک گزاره به ما خواهد داد.این امر به این معنی است که تابع گزارهای از گزاره تنها به این خاطر متفاوت است که مبهم یا نامعین است یعنی شامل متغیری است که هنوز مقداری به آن داده نشده است" (Hylton, 1991, p.291).

۵- (x) در این‌جا به معنی «به ازای هر x» است که امروزه به‌صورت (∀x) نوشته می‌شود.

۶- نماد ˆ را سیرکومفلکس می‌نامند. زمانی که سیرکومفلکس بر سر متغیر آزادی که در یک تابع گزاره‌ای آمده قرار می‌گیرد به این معناست که متغیر نماینده مقدار معینی است و در نتیجه تابع گزاره‌ای مقدار معینی را بدست می‌دهد(Linsky, 2011) .

۷- لازم به توضیح است که تابع گزاره‌ای «xˆ همه خصوصیت‌های یک ژنرال خوب را داراست» تابع گزاره‌ای «xˆ شجاع است» را پیش‌فرض می‌گیرد و بنابراین از مرتبه‌ای بالاتر از تابع گزاره‌ای دوّم است.

۸- بنابراین با توجه به تعریفی که در متن آورده شده اعداد طبیعی ۰ و ۱ و ۲ را بصورت زیر می‌توان تعریف کرد: (Ø={ })

۰={Ø} یا ۰={ { } }

۱={Ø و ۰} یا ۱={ { } و { { } } }

۲={Ø و ۰ و ۱} یا ۲={ { } و { { } } و { { } و { { } } } }

منابع

- استرول، اوروم (۱۳۸۷)، فلسفه تحلیلی، ترجمه فریدون فاطمی، تهران: انتشارات مرکز.
- راسل، برتراند (۱۳۹۰)، *شرح انتقادی فلسفه لایبنیتس*، ترجمه ایرج قانونی، تهران: نشر مهرویستا.
- راسل، برتراند (۱۳۸۷)، *تکامل فلسفی من*، ترجمه نواب مقربی، تهران: صراط.
- بارکر، استیفن (۱۳۴۹)، *فلسفه ریاضی*، ترجمه بیرشک، تهران: خوارزمی.
- لاریجانی، علی (۱۳۸۰)، *سه نحله مهم در مبانی ریاضیات*، فصلنامه فلسفه، شماره ۲-۳، تهران: حکمت.
- امید، مسعود (۱۳۸۱)، *درآمدی بر فلسفه ریاضی*، تبریز: یاس نبی.
- ایوز، هاروارد .و(۱۳۸۶)، *آشنایی با تاریخ ریاضیات*، ج۲، ترجمه وحیدی اصل، تهران: مرکز نشر دانشگاهی.
- موحد، ضیاء (۱۳۸۷)، *از ارسطو تا گودل*، مجموعه مقاله‌های فلسفی-منطقی، تهران: هرمس.
- ویلرد ون ارمن، کواین (۱۳۸۲)، «در باب آنچه هست»، مجموعه مقالات ارغنون، چاپ دوّم، ص۲۵۱-۲۳۱.
- Anglin, W.S. (1994) *Mathematics: A Concise History and philosophy*. New York: Springer-Verlag.
- Griffin, Nicholas (ed.) (2003) *The Cambridge Companion to Bertrand Russell*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Hylton, peter, (1990) *Russell, idealism, and the emergence of analytic philosophy*, Oxford: Oxford University Press.
- Haaparanta, Leila, (2009) *The Development of Modern Logic*. New York: Oxford University Press.
- Lackey, Douglas, (1981) «Russell's 1913 Map of the Mind», in *Midwest Studies in philosophy, VI*, eds. Peter A. French, *et al*. Minneapolis: University of Minnesota Press.
- Linsky, Bernard, «The Notation in Principia Mathematica», The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2013 Edition), Endward N. Zalta (ed.), URL=http://plato.stanford.edu/archives/fall2011/entries/pm-notation/
- Russell, Bertrand and Whitehead, A. N. (1927) *Principia Mathematica to *56*. Cambridge: Cambridge University press.
- Russell, Bertrand, (1903) *Principles of Mathematic*s, Cambridge: Cambridge University press.
- Russell, Bertrand, (1897) *An Essay on the Foundations of Geometry*, Cambridge: Cambridge University press.