

هویت عدد در فلسفه تحلیلی فرگه

عبدالرضا صفری*

استادیار دانشگاه پیام نور

چکیده

تبیین و تحلیل هویت و مفهوم عدد در قلمرو معیارهای پذیرفته شده فلسفه تحلیلی از منظر فرگه، هدف اصلی این مقاله است و دست آورد مهم آن ورود مقوله‌های مفهوم و مصداق مفهوم هم‌قوه، در تعریف ماهیت عدد و در نتیجه ارایه برداشتی نو از مفهوم عدد است. در رویکرد معرفت‌شناسی به عدد که فرگه آن را رد می‌کند، پرسش این است که «عدد چگونه به ما داده می‌شود؟» در حالی که باید می‌پرسید «عدد به چه چیزی نسبت داده می‌شود؟» پاسخ فرگه براساس مبنای فلسفه تحلیلی، یعنی اصل متن آن است که اعداد به «مفهوم»ها نسبت داده می‌شود. ولی نقص آشکار اصل متن و بهره‌گیری از اصل هیوم سبب کنار گذاشتن آن می‌گردد و رویکرد دیگری به مفهوم عدد براساس مصداق و مفهوم هم‌قوه شکل می‌گیرد و تعریف ارایه شده از عدد براساس برهان استقرایی، اتقان می‌یابد. **واژه‌های کلیدی:** انتزاع‌گرایی، مفهوم، هم‌قوه بودن، اصل متن، همانندی، اصل هیوم.

- تاریخ وصول: ۹۰/۶/۲۰، تأیید نهایی: ۹۲/۵/۱۲

*Email: safary_r@yahoo.com

مقدمه

آموزه‌های اولیه فرگه درباره علم حساب در کتاب «مبانی علم حساب» Grundlagen گرد آمده است. وی برای نخستین بار از نظرگاه فلسفی و نه صرفاً منطقی، به بررسی و نقد دیدگاه‌های معاصران و پیشینیان خویش درباره دو پرسش می‌پردازد: عدد چیست؟ و ماهیت صدق‌های علم حساب چیست؟ (Dummet, 1967, 226) او در صدد برآمد تا در این کتاب، به عنوان اولین اثر در فلسفه تحلیل زبانی، پرسش زبانی را به هیئت پرسش معرفت‌شناختی یا وجودشناسی درآورد (Heck, 1998, 772). او به جای دروغین دانستن آن به گونه‌ای این پرسش را از نو طراحی می‌نماید که پاسخ نوینی برای آن یافت شود. وی در راستای پژوهش درباره عدد، رویکرد خود را بر سه اساس استوار می‌سازد.

الف) رد روان‌شناسی‌گرایی، جداسازی دقیق امور مربوط به روان‌شناسی از امور منطقی و امور ذهنی از امور عینی.

ب) عدد نیز همانند هر واژه دیگری، تنها در متن عبارت معنا دارد (اصل متن) (Ibid, 773).

پ) جداسازی دقیق مفهوم و شیء. مفاهیم همان محمول‌هایند و اشیاء از طریق واژگان خاص فرق نهاده می‌شوند.

فرگه در قطعات ۴۵ تا ۵۴ این کتاب، از تمایز میان مفهوم و شیء سخن می‌گوید. ولی هدف واقعی او پرداختن به پرسش از عدد و مفهوم عدد است. در این قطعات به دو جنبه توجه می‌گردد. نخست جنبه سلبی که در آن به نقد نظرگاه فلاسفه - ریاضی‌دانان پیشین درباره ماهیت عدد پرداخته می‌شود. فرگه در این بخش ثابت می‌کند که عدد نه شیء فیزیکی است، نه دارای یکی از خواص فیزیکی نه ایده یا صورتی ذهنی است و نه می‌توان آن را یک مفهوم انتزاعی تلقی نمود. دوم، جنبه ایجابی است که در آن وی نظرگاه مختار خویش را درباره مفهوم عدد بیان می‌دارد و در صدد توجیه فلسفی اعداد طبیعی برمی‌آید.

فرگه بنابر اصول سه‌گانه‌ای که بیان نمودیم، رویکرد رایج گذشتگان به عدد را به کلی تغییر می‌دهد. پرسش پیشینیان درباره عدد چنین بود «عدد چگونه به ما داده می‌شود». به همین دلیل آنان نگرشی معرفت‌شناختی به عدد داشتند. در حالی که فرگه می‌پرسد: «عدد به چه چیزی نسبت داده می‌شود». اعداد مختلفی را می‌توان به یک شیء خاص نسبت داد. برای نمونه می‌توان برای اشاره به مجموعه‌ای از کارت‌ها از عدد «یک مجموعه» استفاده نمود. و یا عدد مثلاً ۵۲ کارت را به کار برد و یا تقسیم بندی‌های دیگری در درون این مجموعه را با اعداد دیگری نامگذاری نمود. گرچه در این حالت بی تردید اوصاف به عدد امری ذهنی است و به شیوه اندیشیدن ما درباره ایزه موردنظر ما بستگی می‌یابد (قطعه‌های ۲۶ و ۲۵، Frege, ۱۸۸۴). ولی آنچه سبب متفاوت شدن اعداد نسبت داده شده به یک ایزه می‌شود، به واقع «مفهومی» است که در هر مورد به کار می‌رود. مثلاً در یک مورد با «() یک دسته کارت است» و در حالت دیگر با «() یک کارت است» نمایش داده می‌شود.

بنابراین محتوای عبارت عددی، گزاره‌ای درباره یک «مفهوم» است. مفهوم و امور درباره آن از نگاه فرگه، درست به اندازه ایزه‌ها و واقعیات پیرامون آنها، اموری عینی‌اند. از این رو وی شائبه ذهنی بودن «مفهوم» موردنظر خویش را رد می‌کند و به باور مفهوم عینی می‌رسد. لذا اوج بخش سوم «مبانی علم حساب» این عبارت است: عدد، حکمی است درباره یک مفهوم (Noonan, 2001, 8). او کلید حل تمامی مشکلات درباره ماهیت عدد را به کف «مفهوم» می‌سپارد. مهم‌ترین روش اشارت نمودن به یک عدد باید به وسیله یک عبارت در شکل «عدد متعلق به مفهوم F است» باشد. مثلاً عدد متعلق به مفهوم «ماه کره زمین» دلالت به عدد یک دارد. چون تنها یک چیز وجود دارد که ماه کره زمین است (Heck, 1998, 773).

بخش دیگری از رویکرد فرگه به مفهوم عدد که اهمیت خاصی دارد، اصل متن است. چنان که بیان شد فرگه طرح پرسش معرفت‌شناختی درباره مفهوم عدد را بر نمی‌تابد. «عدد چگونه به ما داده می‌شود؟» از منظر وی به تلقی نادرستی از خاستگاه عدد می‌انجامد که در دیدگاه گذشتگان به وضوح دیده می‌شود. پرسش گذشتگان باید طراحی نوینی بیابد: «چگونه

می‌توان به عدد اشارت یا دلالت نمود؟» یا آن که چگونه می‌توان درباره عدد سخن گفت. برای این امر کافی است براساس اصل متن، معنای گزاره‌ای را تعریف نمود که واژه عدد در آن به کار رفته است (Dummet, 1991, 72-73). بنابراین فهم ما از عدد باید بنا بر فهم ما از عباراتی باشد که در بردارنده اسم عدد است.

اکنون خواننده دریافته است که مسیر طبیعی بحث درباره عدد چنین است که نخست به نقد و بررسی عقاید و دیدگاه‌های قابل اعتنا در باب مفهوم عدد خواهیم پرداخت و آن‌گاه نظرگاه فرگه را بررسی و تحلیل خواهیم نمود.

پاره ای از نظرگاه‌ها درباره مفهوم عدد

۱- تعریف عدد براساس قواعد کلی

لایبنیتس، استوارت میل و گروسمن، عدد یک را مفروض می‌گرفتند و سپس از رهگذر افزودن بر عدد یک، کوشیدند تا هر یک از اعداد جزئی و خاص را بدست آورند. نقد فرگه بر این دیدگاه آن بود که نه تنها عدد یک تعریف نشده باقی مانده است بلکه درباره ملاک و معیار افزودن بر عدد یک نیز سکوت نموده‌اند. از این گذشته، آنچه از این فرآیند حاصل می‌آید، تعریف اعداد جزئی نیست، بلکه قواعدی کلی است که به دلیل کلیت، فقط از مفهوم کلی عدد حاصل می‌آید. لذا نمی‌توان از آن انتظار داشت که تعریف عدد جزئی را در اختیار بگذارد. پس حاصل این نظرگاه نه‌ارایه مفهوم اعداد جزئی بلکه پاره‌ای قواعد و گزاره‌های کلی است (قطعه ۱۸، ۱۸۸۴، Frege-).

به نظر می‌رسد داوری فرگه در مورد این نظرگاه کاملاً بجا بود. چون برای فراچنگ آوردن قوانین در مورد عدد اصلی، ناچار باید آن را تعریف نمود و از سوی دیگر اگر صرفاً به قواعد عدد اصلی نیاز داریم، هیچ حاجتی به قوانین کلی نداریم تا معادلات عددی مربوطه به اعداد صحیح مثبت را از آن بدست آوریم. می‌توان از راه تعریف برگشتی (recursion) و اعمال ریاضی مورد نیاز و سرانجام با استفاده از اصل استقراری ریاضی که در آن عدد یک و عمل

جانشینی استفاده می‌شود، اعداد صحیح مثبت را به دست آورد (Dummet, 1991, P.23). ما همین مطلب را در انتهای این مقاله مورد بحث بیشتری قرار خواهیم داد.

۲- مفهوم هندسی عدد

چنان‌که می‌دانیم علم حساب و هندسه از حیث مقدمات اولیه ارتباط تنگاتنگی دارند. پاره‌ای از متفکران بر این اساس و با هدف هموار ساختن کار بست علم حساب در هندسه، اعداد را نسبت میان کمیت‌هایی همچون طول‌ها و سطح‌ها معرفی نمودند (Frege, 1884, 23). نماینده سرشناس این باور، نیوتن است (قطعه ۱۹- Ibid). نقد مهم بر این دیدگاه آن است که به واقع از اعداد صحیح اصلی غفلت شده و عدد را به محدوده کسرها و عدد گنگ هدایت کرده است (Dummet, 1991, 73). بنابراین، تعریف نیوتن از عدد، تعریف به‌أخص است. ولی از آنجا که هنوز تمایز دقیقی میان اعداد صحیح و اعداد گنگ و کسرها پدید نیامده است، این نقد نمی‌تواند نقد محکمی باشد.

به نظر می‌رسد حتی می‌توان از نیوتن در برابر این نقد دفاع نمود. به این نحو که وی در تعریف عدد نمی‌خواسته اعداد صحیح را نادیده بگیرد بلکه برای ارایه تعریفی دقیق‌تر از عدد صحیح، مفهوم رابطه و کمیت را هم وارد تعریف عدد نمود. او می‌خواسته نشان دهد که دامنه مفهوم عدد صحیح را باید به نحوی وسعت بخشید که این همانی یا یکسانی دونسبت میان طول‌ها را هم تعریف نماید و کاربرد واژه تعددهای یکسان (equimultiples) که به معنی این همانی عددی است حاکی از همین هدف وی است.

نقد دیگر فرگه بر نظرگاه نیوتن این بود که حتی بدون ارجاع به مفهوم عدد نیز می‌توان یکسانی میان طول‌ها را تعریف نمود. از این گذشته عدد در تعریف هندسی اش هیچ ارتباط و قرابتی با عدد در تعریف عادی و زندگی روزمره ما آدمیان ندارد. چون اغلب از معنای عدد در مفهوم عدد صحیح، مراد می‌شود.

نقدی بنیادین بر تعریف هندسی عدد این است که اصولاً نیازی به چنین تعریفی احساس نمی‌شود (Frege, 1884, 26). چون خود علم حساب نیز می‌تواند نیاز ما به یک تعریف هندسی از مفهوم عدد را برآورده سازد. برای مثال هنگام بحث از تعداد ریشه‌های یک معادله یا عدد اول مساوی یا کوچک تر با عدد خاصی، می‌توان نیاز احتمالی به تعریف هندسی از عدد را هم تأمین نمود و حاجتی به آموزه ای جداگانه نداریم. باز ساده‌تر بگوییم، همان مفهوم عددی که به پرسش «چه مقدار» پاسخ می‌دهد، به این پرسش هم پاسخ می‌دهد که در یک طول، چه تعداد «واحد» (unit) قرار گرفته است.

از منظر نگارنده هرگاه مراد نیوتن از واژه کمیت در تعریف عدد، به کمیت هندسی یا نسبت میان کمیت‌ها محدود نگردد و شامل مجموعه و دسته‌های کمی نیز شود، بسیاری از انتقادات علیه آن بی‌اثر می‌گردد.

۳- تعریف ناپذیری عدد

پاره‌ای از متفکران به دلیل بساطت عدد، آن را تعریف ناپذیر دانسته‌اند (Dummet, 1991, 74). از منظر هنکل، عدد مفهومی بسیط و بدیهی است. این که مثلاً ما درباره چیزی یک‌بار، دوبار یا سه بار... فکر می‌کنیم یا آن را بیان می‌کنیم، نمی‌تواند تعریف شود، چون مفهوم تعدد، امری بسیط است.

چنان‌که پیش‌تر گفته‌ایم، رویکرد فرگه درباره عدد، به طور مستقیم به مفهوم عدد بازمی‌گردد، لذا به نظر نمی‌رسد وی باور هنکل را بپذیرد پس بساطت عدد نمی‌تواند مانعی بر سر راه تعریف مفهوم عدد برای فرگه به شمار آید.

۴- عدد به عنوان صفت شیء خارجی

چنان که می‌دانیم عدد براساس ساختار دستوری به جای صفت در عبارت می‌آید و نقش محمول را دارد. به واقع عدد مانند هر صفتی همچون سخت، سنگین، قرمز و... می‌تواند یکی از ویژگی‌های اشیاء خارجی باشد. اما همچنان جای پرسش است که آیا یک عدد خاص را می‌توان همچون صفتی مثلاً در زمره رنگ‌ها قرار داد؟ پاسخ مناسب به این پرسش سبب می‌گردد تا عدد، جایگاه خاص خویش را در میان سایر مفاهیم پیدا کند (Frege, 1968, 27). برای پاسخ به این پرسش دو دیدگاه وجود دارد:

الف) دیدگاه جورج کانتور و شرودر. این دو در مورد منشاء پیدایش عدد دیدگاه مشترکی دارند. از آنجا که ریاضیات علمی تجربی است و با لحاظ اشیاء عینی و خارجی آغاز می‌گردد، عدد نیز براساس واقعیت و اشیاء خارجی و با دخالت فرآیند انتزاع از آنها، شکل گرفته و قالب‌ریزی می‌شود. در این نظرگاه آدمی با مدد گرفتن از عدد یک، از واحدهای واقعی (reul nits) بیرون ذهنی کپی برداری می‌نماید (Frege, 1884, 27). در فرآیند کپی برداری، همه صفات واحدها مانند رنگ، شکل و... از آنها جدا می‌شود و تنها چیزی که باقی می‌ماند تناوب (Frequency) و تکرار آنها است. این تناوب و تکرار نام دیگری برای عدد است. از این رو اینان تناوب یا عدد را در زمره و ردیف رنگ و شکل نهاده و آن را صفت اشیاء تلقی می‌نمایند.

ب) دیدگاه فرگه و بومن Bumann. از منظر ایشان، عدد نه تنها وصف شیء خارجی نیست بلکه تفاوت آشکاری میان عدد و مثلاً رنگ شیء وجود دارد. دلیل امر واضح است. وقتی که به ابژه‌های محسوس و اشیاء خارجی توجه می‌نماییم، چنین نیست که با واحدهای معین و مشخص به ما داده شوند. بلکه آزادانه می‌توان در هر یک از آنها تعددها و تقسیم‌بندی عددی دیگری پدید آورد. این در حالی است که مثلاً رنگ آبی یک سطح، مستقل از هرگونه انتخاب آدمی به آن تعلق دارد و شیوه نگرش ما به آن کمترین تفاوتی نسبت به آن ایجاد نمی‌کند

(Ibid, 28) در حالی که شیوه نگرش ما به یک ابژه محسوس سبب تفاوت در عدد نسبت داده شده به آن می‌گردد (قطعه ۲۲-Ibid). به مثالی توجه کنید :

هرگاه کتاب لغتی به کسی داده شود و بگویند وزن آن را بدست آور، تمام آنچه را که باید بدست آورد به او گفته‌اند. اما هرگاه این کتاب به وی داده شود و بگویند تعداد آن را بدست آور، برای وی روشن نساخته‌اند که آیا مقصود تعداد خود کتاب است یا تعداد کل واژگان کتاب است، یا تعداد اسامی اعلام یا تعداد اسامی جاها و یا تعداد واژگانی است که ذیل هر اصطلاح آمده است و....

در این مثال بر این نکته تأکید می‌شود که عدد یک یا صد یا هر عدد دیگری به خودی خود به یک شیء تعلق ندارد و این شیوه نگرش اختیاری و گاهی متفاوت آدمی به ابژه محسوس است که در چگونگی شمارش آن دخالت دارد. بنابراین از آنجا که عدد وصف شیء خارجی نیست، تنها یک راه و شیوه خاص برای شمارش یک مجموعه وجود ندارد. اگر چنین باشد همین که توده ای از یک ابژه طبیعی به فردی داده شود و بگویند تعداد آن را پیدا کن باید بی درنگ مقصود را دریابد. این نقد روشنی بر باور استوارت میل است که عدد را خاصیت شیء خارجی می‌دانست و این که تنها یک راه و شیوه خاص شمارش برای آن وجود دارد.

تفاوت مهم دیگر میان رنگ و عدد آن است که عدد کاربرد عام دارد. خلاف عقیده استوارت میل، که فقط پدیدارهای طبیعی را قابل شمارش می‌دانست، فرگه در قطعه ۲۳ «مبانی علم حساب» بر آن است که عدد بر انسان، بر فرشته بر کنش‌ها و حتی افکار آدمی، بر هر آنچه که موجود است و به تخیل درمی‌آید، قابل اطلاق است.

تفکر لایب‌نیتس در این مورد برای فرگه الهام بخش بود. از منظر وی درست است که بعضی چیزها را نمی‌توان وزن کرد چون نیرو و قدرت ندارند و بعضی دیگر را به خاطر آن که فاقد جزءاند نمی‌توان اندازه گرفت ولی هیچ چیز وجود ندارد که به شمارش تن ندهد. از این رو لایب‌نیتس عدد را گونه ای هیئت و حالت متافیزیکی می‌داند.

۵- هویت ذهنی داشتن عدد

در فقره پیش دریافتیم که شیوه نگرستن ما به ابژه در تعیین عدد متعلق به آن دخالت تام دارد. فرگه برای تأیید نظرگاه خویش در قطعه ۲۵ مبانی علم حساب از بارکلی نام می‌برد. از منظر بارکلی، عدد چیزی ثابت و تغییرناپذیر نیست و گرچه در اشیاء فی نفسه، موجود است ولی به کلی مخلوق ذهن است (Dummet, 1991, 76). پس از نگاه وی، عدد یا یک ایده ذهنی است یا ترکیبی از ایده‌ها که نام خاصی به آن داده می‌شود و سپس آن را یک واحد تلقی می‌نمایند. حال اگر چنین باشد که ذهن به انحاء گونه‌گونی ایده‌هایش را به هم برمی‌آمیزد لذا واحدها هم تغییر می‌کند و ذهن از به هم پیوستن واحدها، عدد را پدید می‌آورد این پرسش مجال می‌یابد که آیا عدد هویتی ذهنی دارد؟ آیا از رهگذر استنباط ذهنی معین می‌شود که کدام عدد باید به مجموعه یا انباشته مورد نظر نسبت داده شود؟

به گمان نگارنده پاسخ فرگه به این پرسش‌ها روشن است. از نگاه وی عدد نه مکان‌گیر است و نه فیزیکی چنان که میل معتقد بود و نه به سان ایده‌ها، امری ذهنی است بلکه غیرمحسوس و عینی است. مراد از عینی بودن عدد چیست؟ یکی از معانی عینی بودن شاید فیزیکی یا طبیعی بودن عدد است. فرگه در قطعه ۲۵ مبانی علم حساب استوارت میل را پیرو این نظرگاه می‌داند و سخن وی را نقد و سپس رد می‌کند. از نگاه فرگه، حرف میل کاملاً راست است که دو سیب از حیث طبیعی و فیزیکی متفاوت از سه سیب و دو اسب متفاوت از سه اسب است. این درست است که اینان پدیدارهای محسوس و متفاوتی هستند ولی نمی‌توان نتیجه گرفت که خود دو بودن و سه بودن هم فیزیکی‌اند (Frege, 1884, 33). ملاحظه می‌شود مثلاً دو بودن یا یک جفت مانند دو کفش از حیث فیزیکی قابل تبیین نیست. اما مراد فرگه از عینی بودن عدد چیست؟

«مرادم از عینی بودن چیزی است مستقل از احساس، شهود و تخیل آدمی و مستقل از جملگی صورت‌های ذهنی فرد که از خاطره تجارب گذشته وی ناشی می‌شود. ولی عینی، چیزی مستقل از عقل نیست» (Ibid, 36).

می‌توان از این گفته دریافت که ملاک عینی بودن خالی از هرگونه ویژگی فردی-شخصی و تکرارناپذیری و به واقع حاکی از معرفی یک معیار مشترک و همگانی است. شناخته شده ترین ویژگی علم حساب، عینی بودن آن است به این معنی که اعتبار یا عدم اعتبار براهین و تعاریف آن می‌تواند در قلمرو اقناع همگانی قابل تعیین باشد. از این رو نزاع‌های سلیقه‌ای میان ریاضی‌دانان صورت نمی‌بندد و حل نشده رها نمی‌شود.

فرگه در تعریف عینی بودن هیچ جایی برای ساختارهای ذهنی آدمی که در خلوت آگاهی او صورت می‌بندد در نظر نمی‌گیرد. صورت‌های ذهنی و یا هر چیز دیگری که وجودش وابسته به آگاهی یک فرد باشد، امری شخصی است و قابل انتقال به دیگران نیست (Dummet, 1991, 9.77). به همین دلیل است که وی همواره و با دقت تمام امور روان شناختی و ذهنی را از امور منطقی و عینی فرق می‌نهد. نکته دیگر مورد اشاره فرگه در تعریف عینی بودن آن است که آنچه که می‌توان درباره آن براساس ضوابط و قواعد مشترک حکم نمود، امری عینی است. یعنی محصول فعالیت ذهنی آدمی نیست. بنابراین از آنجا که وصف‌های عددی (ascription of number) و گزاره‌های علم حساب طبق ضوابط مشترک مورد قضاوت قرار می‌گیرند، پس اعداد اموری عینی اند.

فرگه در عینی شمردن عدد، خواننده را از دو خطا بر حذر می‌دارد. یکی آن که عدد را یک ایده به شمار آورد. در این صورت علم حساب پای در کفش روان‌شناسی می‌کند که با ایده‌ها و تداعی آنها سروکار دارد. اگر مثلاً عدد دو را یک ایده به شمار آوریم هرکس می‌تواند عدد دویی مخصوص خودش داشته باشد. در معنای گسترده تر هر فردی باید دارای عددی خاص خود باشد و نتواند با دیگری که عددش تفاوت دارد به نزاع برخیزد. در این صورت باید میلیون‌ها عدد از نوع مثلاً عدد دو وجود داشته باشد و با تولد افراد دیگری، همچنان بر آن افزوده گردد (Ibid, 37).

دوم، عدد را «واقعی» تلقی نماید. اعداد عینی اند اما واقعی نیستند، مراد از واقعی چیست؟ باید دانست که واقعی نقطه مقابل خیالی یا Ideal نیست. فرگه در نوشته‌هایش از

صفت آلمانی Wirklich به معنی واقعی بهره می‌گیرد و با استفاده از آن میان انضمامی و انتزاعی فرق می‌گذارد. به نظر می‌رسد هنگامی چیزی دارای صفت Wirklich است که یک عامل اثرگذار و علی (causal agent) باشد. یعنی توانایی اثرگذاری مستقیم یا با واسطه روی حواس را داشته باشد، به تعبیر دیگر کنش‌ها و اعمالی که دور یا نزدیک روی ادراکات حسی آدمی اثر می‌گذارد. از جمله چیزهایی که غیر واقعی اند و فاقد صفت اثرگذاری علی‌اند می‌توان به محور کره زمین، خط استوا و مرکز توده منظومه شمسی اشاره نمود (Frege, 1968, 27).

با کمی دقت می‌توان در مقام جدل با فرگه برآمد و گفت گرچه محور زمین امری غیرواقعی است و اثری روی ادراکات حسی ندارد ولی آنگاه که محور زمین تابع پیش روی اعتدالین و تمایل قطب باشد البته روی ادراک حسی اثر می‌گذارد، لذا محور زمین هم می‌تواند واقعی باشد. این نکته شاید برای خواننده چندان چشمگیر نباشد ولی ناتوانی در درک این که عدد امری عینی و در عین حال غیرواقعی است از منظر مایکل دامت به خطایی بزرگ می‌انجامد (Dummet, 1991, p.81). ریشه این ناتوانی به تلقی روان شناختی از علم حساب بازمی‌گردد و سبب می‌گردد تا عدد، فقط محتوا یا مخلوق آگاهی قلمداد شود.

فرگه از تفاوت میان عینی و غیرواقعی دو چیز می‌خواست، اول: اعداد به نحو عینی موجودند. دوم: این که اعداد به حساسیت داده نمی‌شوند و ما در عین آن که از اعداد اثری نمی‌گیریم ولی در فکر و اندیشه خویش آنها را می‌شناسیم. بنابراین وی با باور به قلمرو عینی و غیرواقعی، موضع ضد کانتی خویش را آشکار می‌کند. چرا که کانت نتوانست میان ایده ذهنی و ایده عینی فرق بگذارد لذا ایده را پیوسته، ایده ذهنی می‌دانست. نتیجه بحث این است که عدد نه خاصیت اشیاء خارجی است و نه امور ذهنی بلکه غیرمحسوس و عینی است.

۶- عدد، مجموعه‌ای از واحدها و نظرگاه انتزاعی بودن عدد

واپسین نظرگاه درباره مفهوم عدد که پیش از نظرگاه فرگه مطرح می‌گردد این است که اعداد مجموعه‌ای انباشته‌ای از واحدهای بی‌هویت (featurless units) هستند. قدیمی‌ترین

پیرو این نظرگاه اقلیدس است ولی در دوره جدید می‌توان به هوسرل و کانتور اشاره نمود. فرگه در قطعه ۲۸ مبانی علم حساب به تبیین و نقد این نظرگاه می‌پردازد.

تفکر فلسفی که از اعداد به منزله واحدهای بی‌هویت دفاع می‌نمود نظرگاه انتزاعی بودن عدد است. بنابراین آموزه هنگامی که از مجموعه و توده‌ای از اشیاء شمرده شده، ویژگی‌های خاص هر کدام و نه نفس چیز را کنار بزنیم در ذهن مجموعه‌ای از واحدهای فاقد هویت خاص و به تعبیری انتزاعی صورت می‌بندد. اکنون می‌توان این واحدهای بی‌هویت - اعداد - را درباره هر مجموعه‌ای که دارای همان مقدار اشیاء باشد، به کار گرفت (Frege, 1968, 45).

شیوه رسیدن به مثلاً عدد ۳ این است که نخست باید به یک سه‌پاره‌ای توجه نمود و سپس ویژگی‌ها یا صفاتی را که عناصر این سه‌پاره را از عناصر سه‌پاره‌های دیگر متمایز می‌سازد، جدا نمود. به این شیوه مجموعه‌ای از واحدهای سه‌گانه و خالی از هرگونه ویژگی پدید می‌یابد. این مجموعه واحدهای یکسان و یک‌جور می‌تواند زمینه‌ساز تصور عدد سه باشد. به این ترتیب به واقع از رهگذر انتزاع صفات، ذوات یعنی واحدهای نوینی هویدا می‌شود.

هوسرل نیز همین شیوه را برای بیان مفهوم عدد، دنبال می‌کند. از نگاه وی هرگاه به یک مجموعه اشیاء انضمامی مثلاً ماه، اسب، انسان توجه شود و ویژگی‌های خاص هر کدام انتزاع شود، مفهوم یک چیز، یک چیز و یک چیز اصل می‌گردد. به تعبیر دیگر مفهوم یک، یک و یک حاصل می‌شود که این مفهوم به نوبه خود مفهوم عدد سه است (Grossmann, 1986, 98). می‌توان نقدهای فرگه به آموزه انتزاع‌گرایی را به دو دسته تقسیم نمود (Frege, 1884, 45):

الف) نقدهایی که به کل این آموزه صورت می‌گیرد:

۱- هرگاه مراد از عدد، مجموعه یا کثرت و تعددی از واحدها باشد نمی‌توان عدد یک و صفر را تبیین نمود.

۲- اگر عدد، مجموعه‌ای از واحدها باشد و مراد از مجموعه «توده»، «کپه» یا گروه باشد نه تنها این واژگان دو پهلو و مبهم‌اند بلکه اشاره دارد به این که واحدها از حیث مکان هم کنار و مجاور یکدیگرند. در این صورت نمی‌توان قابلیت اعمال‌پذیری عام و کلی عدد را توجیه نمود.

۳- از منظر فرگه فرآیند انتزاع هیچ مناسبتی با شکل‌گیری مفهوم عدد ندارد (Dummet, 1991, P.38) چون اعداد باید تبیینی از کثرت ارایه دهند در حالی که در فرآیند انتزاع به واقع مفهوم عدد به واحدهای یکسانی فروکاسته می‌شود که تنها از حیث مکانی- زمانی مجاورت دارند. بنابراین انتزاع‌گرایی بر سر یک دوراهی آشکار قرار می‌گیرد.

۴- مبنای انتزاع‌گرایی آن است که اعداد مجموعه‌ای از واحدها هستند و این واحدها «یک»‌هایند. در این حالت واحد، دارای خاصیت «یک» بودن است (Noonan, 2001, 97) و به تعبیر فرگه باید به صورت مفهوم- واژه (concept - word) عمل کند، و نشان‌گر صفتی باشد که هر چیزی بتواند آن را دارا باشد. در فقره پیشین این مورد که عدد می‌تواند خاصیت اشیاء خارجی باشد، رد شد. ولی باید بیافزاییم که هرگاه «یک» حاکی از صفت اشیاء باشد باید انتظار داشت حتی حیوانات هم ایده‌ای از آن داشته باشند (Frege, 1884, 83). در حالی که می‌دانیم مفهوم عدد براساس نیروهای عالی ذهن آدمی برای وی صورت می‌بندد.

حتی اگر بتوان پذیرفت که واحدها به عنوان امور منفرد دارای خاصیت و صفت «یک بودن» باشند، همانند هر صفتی که یک ویژگی به موصوف می‌افزاید باید «یک بودن» به واحدهای منفرد چیزی بیفزایند در حالی که در مورد موضوع بحث ما چنین نیست. از این رو فرگه معتقد است که در افزودن صفت «یک» بر واحدها هیچ فایده‌ای متصور نیست (Frege, 1968, 40). به تعبیر دیگر یک بودن صفت درجه اول نیست.

۵- انتزاع‌گرایی در دو تنگنای گریزناپذیر قرار دارد:

اول: ناسازگاری انتزاع‌گرایی با نمادگری علم اعداد. چنان که می‌دانیم از آنجا که عدد ناشی از تنوع و نایکسانی است پس واحدها نباید یکسان باشند (Ibid p.46) حال اگر واحدها تفاوت دارند در نمادگذاری هم باید تفاوت داشته باشند. مثلاً نمادگذاری عدد ۵ چنین است $1'''' + 1'''' + 1'''' + 1'''' + 1''$ این موضوع نه تنها درباره «یک‌ها» بلکه باید در مورد «دو»‌های متفاوت از هم نیز صادق باشد پس داریم: ($1'''' + 1''$ و $1'' + 1''''$ و $1'' + 1''$). نیز در مورد سه هم همین طور است. در این مدل، انتزاع‌گرایی با کثرت و تنوعی نامتناهی از عدد رو در رو خواهد شد.

دوم: با مدل انتزاع‌گرایی نمی‌توان فرآیند جمع و تفریق را تبیین نمود (Ibid) مثلاً هرگاه تساوی $1 = 2 - 3$ را به شکل $1 = (1'''' + 1'''' - (1'' + 1''''))$ بنویسیم به نظر می‌رسد نتیجه مناسبی بدست آورده ایم. ولی با بازنویسی تساوی براساس نظرگاه انتزاع‌گرایی داریم؛ $(1'''' + 1'''''' - (1'' + 1'' + 1''''))$ اما هنوز جای این پرسش هست که نتیجه چیست؟ لذا بنابراین نظرگاه علم اعداد به نقطه توقف کاملی نمی‌رسد.

ب) نقدهایی که به پاره ای از متفکران انتزاع‌گرایی صورت می‌گیرد.

فرگه به خصوص وقت زیادی را صرف نقد آراء هوسرل نموده است (Grossmann, 1986, 98-99) که به لحاظ اهمیت به بیان خلاصه آنها می‌پردازیم.

۱- تحلیل هوسرل درباره مفهوم عدد، در صدد برنمی‌آید تا به پرسش «عدد چیست» پاسخ دهد. بلکه به این نکته می‌پردازد که چگونه مفهوم مجموعه‌ای از واحدها به دست می‌آید. در این تحلیل برای تبیین واقعیت عدد ۳ یک تساوی را مانند $3 = 1 + 1 + 1$ معرفی می‌کند. ظاهراً طرف چپ این تساوی نشان‌گر مفهوم‌های انتزاع شده از چیزی، چیزی و چیزی است. بی‌تردید مفهوم «چیز» نمی‌تواند اساس مناسبی در شکل‌گیری مفهوم «عدد» باشد، مفهوم عدد آشکاراً متفاوت از مفهوم «چیز» است.

۲- رابطه جمع براساس آموزه هوسرل بنابر مبانی علم حساب تبیین پذیر نیست. رابطه جمع از نگاه وی ارتباطی است شکننده که یک ذهن خاص میان فقره‌های متعدد یک

تعدد انضمامی مثلاً ماه، اسب، انسان و... پدید می‌آورد. لذا هرگاه ذهنی در میان نباشد که فقره‌های متعددی مانند یک، به علاوه یک، به علاوه یک را با یکدیگر جمع بندد، مثلاً عدد سه نباید وجود داشته باشد.

۳- بنابر رویه انتزاع از نگاه هوسرل به مفهوم چیزی، چیزی و چیزی دست می‌یابیم. ولی اگر چنین تصور کنیم که چیز اول همان چیز دوم و همان چیز سوم است، دیگر نه با یک مجموعه سه عضوی بلکه فقط یک چیز خاص داریم. در این حالت نمی‌توان مفهوم تعدد و تکثر عدد را تبیین نمود.

نقد سوم فرگه بر سخنان هوسرل نشان می‌دهد که تبیین مفهوم عدد براساس مجموعه‌ای از واحدهای بی‌هویت، به وضعیتی دشوار و دوراهی گریزناپذیری می‌رسد. از یک سو واحدهای بی‌هویت که از رهگذر انتزاع پدید آمده اند همانند و یکسان با یکدیگرند و از دیگر سو با حفظ یکسانی خویش باید نایکسانی و تکثر موجود در مفهوم عدد را تمهید نمایند. جای پرسش است که چگونه می‌توان میان این واحدها تمایز ایجاد نمود تا نمایانگر خصلت مهم عدد باشند؟

پاره‌ای از متفکران دست به دامن تفاوت مکانی- زمانی واحدها گردیده‌اند. ولی از نگاه فرگه تشبیه به این امر ناکارآمد است چون از اعمال پذیرگی کلی و عام عدد غفلت می‌ورزد (Frege, 1968, 53) و تنها آنچه را که زمانی- مکانی باشد قابل شمردن می‌داند. بنابراین واحدهای بی‌هویت را چنان باید تبیین نمود که هم سازگار با انتزاع‌گرایی باشد و هم در عین حال با خصلت ذاتی مفهوم عدد یعنی تکثر، هماهنگ باشد.

جوانز Jevons برای حصول این امر پیشنهاد می‌کند که تفاوت واحدها در «حالت عدم تفاوت» آنها قرار دارد (Ibid, 56). مراد وی این بود که تفاوت اعداد انتزاعی یعنی واحدهای بی‌هویت در حالت عدم تفاوت آنها جای دارد و درست همین امر سبب پیدایش و تبیین تکثر در مفهوم عدد می‌گردد. وی می‌خواست در چارچوبه آموزه انتزاع‌گرایی و بدون

عدول از مبانی آن یعنی واحدهای بی‌هویت، خصلت مهم عدد یعنی تکثر را هم تبیین نماید، ولی سخن وی درست با همان نقدها روبرو می‌شود. مثلاً پیشنهاد وی برای اعداد صفر و یک به کار نمی‌آید. چون در مورد این اعداد حتی «حالت عدم تفاوت» نیز وجود ندارد.

آموزه انتزاع‌گرایی و نقش پر اهمیت آن در تبیین مفهوم عدد در دوره اولیه تفکر فرگه سهم مهمی داشت. به طوری که وی در قطعه ۳۴ مبانی علم حساب، حتی با مدد گرفتن از مثال‌هایی نشان می‌دهد که انتزاع به عنوان یک کارکرد ذهنی، وسیله کارآمدی برای ادراک مفاهیم کلی است. اما در مرحله بعدی تفکر فرگه، چنان که در جریان نقد وی بر هوسرل دیدیم، از این باور عدول می‌کند. بنابراین گرچه وی بر این باور بود که از رهگذر انتزاع می‌توان به یک مفهوم دست یافت ولی دلیلی هم نداریم که نشان دهد وی بر این اعتقاد پایبند مانده باشد (Frege, 1884, 83).

نظرگاه فرگه، خاستگاه مفهوم عدد

چنان که دیدیم، تلاش متفکران پیش از فرگه برای تبیین خاستگاه مفهوم عدد به جایی نرسید. چون آنان یک پرسش را بی‌پاسخ گذاشتند یعنی این که وقتی یک عبارت عددی بیان می‌گردد به چه چیزی اشاره دارد (Frege, 1968, 58). از نظر فرگه، عدد را باید در متن یک حکم لحاظ نمود و تنها در متن یک حکم است که استفاده بنیادین از عدد رخ می‌نماید. بنابراین، پرسش از عدد در دستان فرگه تغییر هویت می‌دهد: عدد به چه چیزی نسبت داده می‌شود؟ وی در قطعه ۴۶ مبانی علم حساب بر آن است که ساختار عبارت‌های عددی همانند ساختار عبارت‌های عدد-صفت است.

لذا در آغاز عبارت‌های عددی پیوسته گزاره‌هایی به شکل «دقیقاً..... n تا وجود دارد» به چشم می‌خورد. و متغیر n حاکی از عدد-صفت است و اتصاف به عدد باید پاسخی مستقیم به پرسش «چه مقدار» باشد.

از منظر فرگه آنچه یک عدد به آن نسبت داده می‌شود، یک مفهوم است. بنابراین محتوای گزاره اتصاف به عدد عبارت است از حمل چیزی به یک مفهوم. لذا در قطعه ۱۳۸ مبانی علم حساب به صراحت می‌گوید: تنها مفهوم – واژگان هستند که می‌توانند یک کثرت را تشکیل دهند. و باز در قطعه ۷۴ توضیح می‌دهد، وقتی واژه مفهوم به کار می‌رود صورت کلی یک محتوای حکم‌پذیر (Judgeable content) درباره یک چیز، چنین است: a تحت مفهوم F قرار می‌گیرد.

خلاصه بگوییم، بیان یک عبارت عددی مانند n تا f وجود دارد، ساختن و بیان عبارتی است. درباره‌ی یک مفهوم و یا خاصیت یک f بودن. یعنی این مفهوم، n بار معرفی شده و این خاصیت n تا نمونه دارد. مهم‌ترین مبنای این باور آن است که می‌توان با مشاهده پدیده‌ها یا واحدهایی خاص به حکم‌های متفاوتی دست یافت که بالسویه صادق باشند. مثل این که درباره یک چیز خاص این «یک بیشه زار است» نیز بیان داشت که این «ده درخت است». همچنین با مشاهده این «چهار گروهان است» نیز گفت «اینها پانصد نفرند». آنچه در هر دو جفت حکم درباره یک چیز خاص تغییر نموده است، مفهوم است یعنی مفهومی جایگزین مفهوم دیگری شده است (Frege, 1968, 59).

برای هرکسی که سخنان گذشتگان درباره مفهوم عدد او را قانع نساخته باشد، آموزه فرگه جذابیت و بلکه فریبندگی خاصی داشت. چون راه حل وی بیشتر به رازگشایی شباهت داشت و از جملگی مشکلاتی که پدید آمده بود، گره‌گشایی کرد.

نقاط قوت و ضعف دیدگاه فرگه

درباره قوت و فریبی آموزه وی پیرامون مفهوم عدد به چند نکته اشاره می‌نماییم:

۱- آموزه وی می‌تواند عدد صفر و یک را با نسبت دادن آنها به یک مفهوم، تبیین نماید: هرگاه بگوییم که ونوس صفر ماه دارد، یک ماه یا دسته ای ماه وجود ندارد تا به چیزی نسبت داده

شود. مرادمان این است که در اینجا به مفهوم ماه ونوس، خاصیتی نسبت می‌دهیم یعنی می‌گوییم زیر این مفهوم، چیزی قرار نگرفته است (Ibid).

از منظر وی به همان معنایی که ۲، ۳، ۴ و... عدد هستند و به پرسش «چه مقدار» پاسخ می‌دهند، اعداد صفر و یک نیز به همین پرسش پاسخ می‌دهند. لذا راه تعیین هر دو دسته این اعداد، روشی یکسان است. مثلاً در مورد عدد چهار وقتی می‌گویید «ارابه پادشاه را چهار اسب می‌کشند» به واقع عدد چهار را به مفهوم «اسبانی که ارابه شاه را می‌کشند» نسبت می‌دهید (Ibid).

۲- فرگه با فرق نهادن «مفهوم» از ایده و با معرفی ایده‌های عینی نشان داد که عدد امری عینی است. یعنی نشان داد که مفهوماً چیزی عینی و مستقل از شیوه لحاظ اشیاء بیان می‌دارند. مثلاً «همه نهنگ‌ها پستان دارند» گرچه چیزی عینی بیان می‌دارد ولی عبارتی درباره مفهوم‌ها است. چون حاکی از تابعیت مفهوم نهنگ از پستاندار است، نه عبارتی درباره حیوانات. چون اگر پرسیده شود، کدام حیوان؟ نمی‌توان به حیوان خاصی اشاره نمود (Ibid, 60). مقصود این است که عبارت عددی که به منزله گزاره‌هایی درباره مفهوم معرفی گردید نیز می‌تواند به نحو عینی صادق یا کاذب باشد.

۳- درست است که چون چیز واحدی تحت مفهوم‌های متفاوتی قرار گیرد، پس می‌توان اعداد متفاوتی هم به آن نسبت داد. ولی نباید گمان کرد که عدد نسبت داده شده به یک مجموعه یا گروه به طریقه نگرش ذهنی ما به آن بستگی دارد. آموزه فرگه این وسوسه را فرو می‌نشاند. چون از نگاه وی این اشیاء طبیعی نیستند که عدد دارند بلکه این مفهوم است که زیر آن عددی قرار می‌گیرد.

به تعبیر دیگر با قرار گرفتن یک چیز تحت مفهوم‌های متفاوت، می‌توان به اعداد متفاوتی درباره این چیز دست یافت. بنابراین موضوع محمول‌های عددی، یک مفهوم است

(Ibid, 62) و به همین دلیل است که اعداد در قلمرو خاص خویش مانعاً الجمع اند چرا که هر کدام بر مبنای یک مفهوم خاص پدید می‌آیند.

۴- از تأکید بر عینی بودن مفهوم، می‌توان دریافت که چرا فرگه تبیین خاستگاه مفهوم عدد از رهگذر انتزاع را وسوسه انگیز می‌دانست. چون آنچه از فرآیند انتزاع فراچنگ می‌آید تنها یک مفهوم حاصل از کارکرد ذهنی است یعنی مفهومی برخاسته از صور ذهنی. در حالی که مفهوم مورد نظر فرگه همسنگ اشیاء، عینیت دارد.

۵- موضوع در یک عبارت عددی، مجموعه‌ای از واحدها نیست تا لازم باشد برای شمارش آنها دست به دامن شیوه خاصی مانند روش مجاورت زمانی- مکانی گردید. بلکه موضوع، یک مفهوم است که اشیاء و ابژه‌ها را می‌توان براساس شیوه‌ای که خود مفهوم تعیین می‌کند، شمارش نمود.

۶- اکنون اعمال پذیری کلی و عام عدد نیز بهتر فهمیده می‌شود. از آنجا که موضوع، در عبارت عددی یک مفهوم است و هر چیزی نیز می‌تواند تحت یک مفهوم قرار گیرد، پس هر آنچه به اندیشه درآید به شمارش هم تن می‌دهد. خواه انتزاعی باشد خواه عینی یا نفس مفهوم و ابژه‌ها (Ibid, 65).

۷- واپسین نقطه قوت آموزه فرگه فرق نهادن دوگونه مفهوم از یکدیگر است. یکی مفهوم توصیفی، مانند مفهوم «قرمز» که نمی‌توان به آن عدد مشخصی را نسبت داد و مثلاً گفت «قرمز» چهار است. دیگری مفهوم ترتیبی (sortal concept)، این نوع مفهوم را می‌توان همچون واحدی تلقی نمود که با عدد متعلق به مفهوم ارتباط دارد. ولی گزاره‌هایی که درباره این واحد و این نوع مفهوم بیان می‌شود می‌تواند مستقل از محیط واحد و تقسیم‌پذیری آن باشد (Frege, 1968, 44) بنابراین در اینجا دو چیز از یکدیگر متمایز می‌گردد یکی مفهومی که عدد به آن نسبت داده می‌شود و دیگری آنچه که تحت این مفهوم قرار می‌گیرد.

به تعبیر دیگر برای نسبت دادن یک عدد به یک مفهوم خاص، نیازی به ارتباط خاصی میان اشیاء و ابژه‌هایی که تحت آن مفهوم قرار گرفته‌اند، نیست. حتی نیازی به انجام عملیات ویژه‌ای روی ایده‌های ذهنی اشیاء وجود ندارد. مفهوم به خودی خود، عمل جمع بستن یا عمل تک‌تک ساختن ابژه‌های تحت مفهوم را انجام می‌دهد (Dummet, 1991, 89).

گرچه مبنای آموزه فرگه که بنا بر آن عدد به یک مفهوم نسبت داده می‌شود، عاری از جملگی نواقص سخنان گذشتگان است، اما ضعف آشکاری در آن دیده می‌شود. این آموزه به کلی مبتنی بر پذیرش آموزه معناشناختی وی است. هرگاه در این اساس تردید شود، حتی اگر روش صحیحی برای نسبت دادن یک عدد به مفهوم، در پیش گرفته شود، باز هم نمی‌توان گفت عبارت پرکننده جای خالی در گزاره‌ای به شکل «... n تا وجود دارد» باید یک مفهوم باشد (Frege, 1884, 73).

مفهوم چیست؟

رکن بنیادین آموزه‌ی عدد در مبانی علم حساب و به خصوص تبیین عدد براساس اصل متن، از منظر فرگه، مفهوم است. و چنان که بارها گفته است عدد، خاصیت مفهوم درجه دوم و به تعبیر دیگر مفهوم ترتیبی است. مثلاً «n تا f وجود دارد» یعنی از مفهوم $n \cdot f$ تا معرفی می‌شود و «n تا مورد معرفی شدن» مفهوم درجه دومی است که با عدد n شناخته می‌شود (Noonan, 2001, 104). مفهوم چیست؟ از نوشته‌های وی می‌توان فهمید که مفهوم در یک عبارت پیوسته به دو صورت هویدا می‌شود یا به شکل واژه‌ای کلی و یا به نحو واژه‌ای فردی و جزئی، البته همیشه در لباس یک محمول.

بنابراین مفهوم، ذاتاً، محمول است و مستلزم شناسه‌ای (argument) برای کامل شدن یعنی باید با چیزی توأم و همراه گردد تا یک محتوای حکم‌پذیر را تکمیل نماید. بنابراین فرگه از مفهوم با واژه «اشباع‌نشده» یاد می‌کند (Dummet, 1991, 89)، و این با نقش و کار کرد مفهوم کاملاً هم‌خوانی دارد.

یک مفهوم از آن حیث اشباع نشده است چون مستلزم چیزی است که تحت مفهوم در آید لذا هیچ‌گاه نمی‌تواند تنها باشد. به تعبیر دیگر، فردی یعنی موضوع به عنوان یک محتوای حکم‌پذیر تحت آن قرار می‌گیرد تا هویت محمول بودن مفهوم را تکمیل نماید. در یک محتوای حکم‌پذیر عنصر موضوع به عنوان یک حد فردی و جزئی تحت مفهوم یعنی محمول قرار می‌گیرد و رابطه میان این دو نیز از طرف محمول یا مفهوم تأمین می‌گردد.

در سخنان فرگه پیرامون مفهوم تناقضی به چشم می‌خورد (Ibid, 90) که نمی‌توان از آن غافل ماند. او در تعریف مفهوم، حدها و واژگان فردی (موضوع) را اموری تابع مفهوم معرفی می‌نماید که نمی‌توانند بدون موضع شناسه‌ی (argument place) خود ظاهر شوند و بنابراین درست ساخت (formed-well) نیستند. ولی از سوی دیگر مثلاً در قطعه‌ی ۷۰ مبانی علم حساب می‌گوید «a تحت مفهوم f» صورت کلی گزاره‌ای درباره یک شیء است. مثلاً اگر مفهوم اسب را با یک عبارت اسمی خاص و با حرف تعریف خاص بیان داریم، اسب دیگر نه یک مفهوم بلکه یک شیء است.

به نظر می‌رسد این تناقض جدی‌ترین شکاف در آموزه مفهوم باشد. باین حال به نظر نمی‌رسد او این امر را چندان جدی گرفته باشد و چه بسا از آن غافل مانده بود. با این حال وی نخستین رویکرد خویش برای تبیین مفهوم عدد را همچنان براساس همین آموزه ترتیب می‌دهد.

تبیین مفهوم عدد براساس اصل متن

دستاورد فرگه در زمینه‌ی تبیین مفهوم عدد آن بود که خلاف پیشینیان که رویکردی شناخت‌شناسی به عدد داشتند، بنابر اصل متن (context principle) رویکردی زبانی پیش گرفت (Dummet, 1991, 111-12). به تعبیر دیگر پژوهش پیرامون ماهیت عدد باید با تبیین معنای عبارتهایی که عدد در آن به کار رفته، آغاز شود. توانایی آدمی برای دلالت و اشارت به عدد، براساس فهم وی از عبارتی که عدد در آن به کار رفته باید تبیین گردد. اکنون باید پرسید که عبارت‌های عددی برای این که درک مفهوم عدد را فراهم آورند باید دارای چه ویژگی‌هایی باشد؟

نخست آن که از منظر فرگه چون اعداد، اشیاء هستند، پس هرگاه با نام‌های اشیاء سر و کار داریم مهم‌ترین شکل عبارت‌های عددی، عبارت‌هایی است که حکایت گریک همانندی باشند (Collison, 1977, 125). مثلاً همان طور که در عبارت ارسطو نویسنده‌ی طبیعیات است، همانندی میان ارسطو و نویسنده‌ی طبیعیات وجود دارد، همین طور هم در عبارت «ماه‌های مشتری چهار تا است» میان مشتری و تعداد ماه‌های آن (چهار تا) همانندی وجود دارد. لذا تناظر یک و به یک و به تعبیر دیگر همانند میان اشیاء و اعداد وجود دارد.

دومین ویژگی عبارت‌های عددی که برخاسته از ویژگی اولی است و فرگه می‌خواهد نظریه اعداد طبیعی را بنابر آن توضیح دهد، فرآیند هم‌قوه بودن (equinumerosity) است. هم‌قوه بودن بنابر تناظر یک به یک میان اشیاء و اعداد شکل می‌گیرد. صورت کلی چنین فرآیندی می‌تواند این گونه بیان شود: مفهوم f هم‌قوه با مفهوم G است اگر و تنها اگر همبستگی یک به یک میان اشیاء تحت مفهوم f و تحت مفهوم G برقرار باشد.

و اما همانندی بدست آمده از این اصل چنین است: عدد متعلق به مفهوم $f = G$ با عدد متعلق به مفهوم G است اگر و تنها اگر مفهوم f هم‌قوه با مفهوم G باشد.

مثلاً عدد متعلق به مفهوم «بشقاب روی میز» درست همان عدد متعلق به مفهوم «مهمانان شام» است. این عبارت صادق است اگر و تنها اگر تناظر یک به یک میان بشقاب‌ها و مهمان‌ها برقرار باشد.

فرگه این مطلب را براساس یک نقل قول از دیوید هیوم در قطعات ۶۳-۵۵ مبانی علم حساب بیان می‌کند. لذا آن را اصل هیوم نام می‌دهد که البته جورج کانتور به آن وجهه ریاضی می‌دهد.

درباره این رویکرد باید به دو نکته اشاره نماییم:

۱- هدف فرگه در این رویکردارایه روشی است برای اشارت و دلالت به اعداد طبیعی و نه تعریف مستقیم آنها به تعبیر دیگر ارایه شیوه‌ای برای سهولت بخشیدن به فهم اعداد. وی

برای این کار، عملگر «درست به همان مقدار چیز» را در قالب صوری «تعداد fها» معرفی می‌نماید. این عملگر با علامت = (مساوی) هم نمایش داده می‌شود که حاکی از رابطه همانندی است و باید همان مقدار چیز خوانده شود. مثلاً عدد متعلق به مفهوم «بشقاب رومیزی = مفهوم مهمانان شام» است.

بنابراین در این جا می‌توان دو عبارت را بایکدیگر هم ارز دانست:

الف - تعداد fها = با تعداد Gها

ب- دقیقاً و درست همان تعداد F وجود دارد که G وجود دارد. حال اگر درست همان تعداد F وجود دارد که G وجود دارد پس رابطه و تناظر یک‌به‌یک میان آنها برقرار است و به تعبیر فرگه این دو مفهوم «هم‌قوه» اند (Scruton, 1991, 246). پس یکی از دو رکن این رویکرد به مفهوم عدد، پنداشت هم‌قوه بودن و همانندی دو مفهوم است و هم‌قوه بودن صفتی از صفات مفهوم است.

۲- رکن دیگر رویکرد فرگه که حتی رکن اول یعنی هم‌قوه بودن هم بر آن استوار است، همانندی میان اعداد و اشیاء است. چون از منظر وی تنها هنگامی می‌توان به همانندی دو عدد حکم نمود که اساس را بر یکسانی اعداد و اشیاء قرار دهیم. اهمیت این موضوع از آن حیث است که وی می‌کوشد تعریف ضمنی عدد را از رهگذر همانندی و تساوی میان نام‌های اشیاء بدست آورد. از این رو برای بازشناسی مفهوم عدد توسط آدمی این همانی اشیاء و اعداد نقش بسزایی برعهده دارد.

به این ترتیب فرگه قاعده‌ای کلی و تأثیرگذار در فلسفه وارد نمود که بنابراین وقتی شرایط همانندی برای اعضای یک گروه از اشیاء فراهم گردد، این گروه به شیوه خاص داده می‌شوند (Currie, 1982, p.43).

بررسی و نقد رویکرد اول

مهم‌ترین اساس رویکرد اصل متن بر دوش یکسانی یا همانندی اشیاء و اعداد نهاده شده است. بدون تردید مراد فرگه این نیست که اعداد، اشیاء فیزیکی و طبیعی‌اند چون این باور به هیچ وجه مقاصد علمی درباره عدد را برآورده نمی‌سازد. تازه وی باور عمومی درباره عدد که بنابر آن گویی اعداد به درون اشیاء کشانده می‌شوند را هم نمی‌پذیرد. در باور عمومی پاسخ مناسب به پرسش عدد دو چیست؟ «دوچیز» است. پس عدد دو ایده ای است از مثلاً دو شیر، دو بشکه، دو درخت، و عدد یک نیز ایده و مفهومی است از یک درخت، یک انسان، در این حالت این اشیاء متعلق به عدد مورد نظر هستند.

به نظر می‌رسد بزرگترین انگیزه فرگه در این همانی عدد – اشیاء این بود که از تلقی افلاطونی اعداد پرهیز نماید (Frege, 1892, 72-3). بنابراین اعداد، ایده‌های افلاطونی نیستند. اکنون باید دید وی چه دلیلی دارد که نشان می‌دهد اعداد همان اشیاء هستند؟ آیا عدد می‌تواند دارای ویژگی‌های شیء بودن، باشد؟

اساس استدلال فرگه برای اثبات شیء بودن عدد آن است که هر عددی دارای نام خاصی است همچنان که اشیاء دارای نام خاص هستند (Frege, 1968, 49-50). بنابراین وقتی مثلاً از «عدد یک» سخن گفته می‌شود. به واقع به وسیله فقره معینی به یک ابژه‌ای معین اشارت می‌شود که می‌تواند متعلق بررسی علمی واقع گردد. مراد فرگه آن است که یک‌های متعددی در کار نیست بلکه تنها یک مورد عدد «یک» وجود دارد. پس عدد یک، همانند عنصر شیمیایی طلا یا مانند امیرکبیر، یک نام خاص است که هیچ کثرتی را بر نمی‌تابد.

جان سخن وی آن است که چون مثلاً عدد یک از حرف تعریف معینی بهره می‌گیرد، خود کفایی و استقلال می‌یابد و از کلیت بیرون آمده و جزئی‌ت مورد لزوم عدد را به کف می‌آورد بنابراین نام خاصی به خود می‌گیرد. به همین دلیل عدد یک، ابژه است.

استدلال فرگه درباره شیء بودن عدد لوازم مهمی دارد، که جملگی نمایانگر ابعاد پراهمیت اصل متن هستند. از این که به اعتقاد وی ابژه‌ها هویت‌هایی‌اند که توسط واژگان مفرد یا حرف تعریف معینی به آنها اشارت می‌شود می‌توان دریافت که اولاً معیار نحوی یعنی حرف تعریف یا واژگان مفرد، مقدم بر هویت وجودی ابژه‌اند (Noonan, 107) و به تعبیر دیگر پرسش زبانی بر پرسش وجودی تقدم دارد. و ثانیاً کارکرد ارجاع واژگان مفرد به ابژه‌ها و به تبع آن وجود ابژه‌ها تنها در عبارتهای ایجابی رخ می‌نماید که نشانگر آموزه تقدم صدق بوجود است. از منظر فرگه مثال روشن عبارتهای ایجابی، عبارتهای این‌همانی است که حاصل حالت ایجابی وجودی در عبارتهاست (Ibid, 108). در چنین عبارتهایی است که گزاره‌های عددی، کارکردی همانند واژگان مفرد دارند و چون هویت فردی و خاصی می‌یابند پس ابژه هستند.

از این‌ها که بگذریم مهم‌ترین انتقاد به شیوه تعریف عدد بر اساس اصل متن را خود فرگه بیان داشته است. از منظر وی مهم‌ترین دستاورد این رویکرد پاسخ به این پرسش است که «شرایط این‌همانی برای اعداد چیست» نه این که عدد بودن چه شرایطی دارد (Currie, 1982, 45). آنچه در این رویکرد گفته می‌شود این است که این‌همانی عددی به وجود شباهت یک به یک میان دو مفهوم بستگی دارد. ولی از این که عدد چیست، سخنی به میان نمی‌آید. از این گذشته اصل همانندی از عهده‌ی تبیین عدد صفر بر نمی‌آید. از این رو فرگه نمی‌تواند بر اصل هیوم حتی برای تبیین همانندی عدد تکیه نماید.

تعریف عدد براساس مصداق

بحث تعریف اعداد براساس همانندی زمینه‌ای فراهم می‌آورد تا فرگه تعریف نوین و رویکرد قابل پذیرش خودش را ارائه دهد. به یک تشبیه توجه کنید؛ فرض کنید که الف شبیه ب است پس هر چیزی که شبیه الف است شبیه ب هم هست و برعکس. در این حالت هر چیزی که تحت مفهوم «شبیه الف» قرار گرفته، تحت مفهوم «شبیه ب» هم قرار دارد. بنابراین این دو مفهوم، مصداق‌های یکسانی دارند. و اگر این دو مفهوم، دارای مصداق یکسانی به معنی ذکر شده

باشند پس به واقع ب شبیه الف است. بنابراین الف شبیه ب است اگر و تنها اگر مصداق مفهوم «شبیه الف» همانند با مصداق مفهوم « شبیه ب» باشد.

حال اگر شیوه‌ای مشابه درباره اعداد به کار گرفته شود براساس آن تعریف عدد متعلق به F چنین است: مصداق «مفهوم در تناظر یک به یک بودن با F». این نکته را به عنوان مقدمه در نظر داشته باشید.

می‌دانیم که شرایط صدق عبارت‌های ذیل یکسان است:

- ۱- عدد متعلق به F همانند با عدد متعلق به G است.
- ۲- مصداق «مفهوم در تناظر یک به یک بودن با F» همانند با مصداق «مفهوم در تناظر یک به یک بودن با G» است.

حال اگر از واژه «هم‌قوه بودن» برای توصیف رابطه مفاهیمی استفاده شود که مصداق شان تناظر یک به یک با هم دارد، می‌توان عبارت ۲ را به شکل ذیل بازنویسی نمود:

- ۳- مصداق « مفهوم هم‌قوه با F » همانند است با مصداق «مفهوم هم‌قوه با G»

اکنون می‌توان گفت عدد متعلق به «مفهوم F» به عنوان مصداق «مفهوم هم‌قوه با F» تعریف شده است. برای نمونه عدد دو مصداق مفهومی است که آن مفهوم دقیقاً در مورد دو چیز به کار می‌رود (Ibid, 47). مراد فرگه آن است که اعداد، به واقع درست شبیه مصداق مفاهیم هستند و احکام مصداق مفاهیم درباره آنها نیز به کار می‌رود.

دو نکته مهم

در باب این تعریف از مفهوم عدد باید به دو نکته مهم اشارت نماییم (Ibid, 48):

الف- برای زمینه سازی جهت ارایه تعریفی یکسان از عدد بر اساس «مفهوم هم‌قوه با F» باید نشان داد که اعداد از حیث مصداق یکی‌اند و بلکه وحدت دارند اما از حیث مفهومی تفاوت دارند. لذا یک عدد، مصداقی وسیع‌تر از دیگری ندارد. فرگه چنین باوری را باوری شهودی می‌داند. و برای اثبات آن برهان خلف می‌آورد. فرض کنید m و n دو عدد متفاوت هستند و هرکدام مصداق مفهوم‌های متفاوتی هم باشند. باز فرض کنید که الف، تحت مفهوم «متناظر با m » قرار دارد. در این حالت الف باید مصداق یک مفهوم باشد که تحت آن دقیقاً m چیز قرار گرفته است. ولی اگر الف همچنین تحت مفهوم «متناظر با n » هم قرار گرفته باشد، او هم مصداق مفهومی خواهد بود که دقیقاً n چیز تحت آن جای گرفته است. و این امر ناممکن است چون $m \neq n$ است.

ب- فرگه بر این باور است که محتوای شهودی (intuitive content) مفهوم عدد را می‌توان در این تعریف یافت که می‌گوید: اگر مفهوم F و G هم‌قوه هستند پس اعدادی که متعلق به F و متعلق به G اند یکسان هستند. از این تعریف نیز می‌توان دریافت که دو عدد متفاوت از حیث مفهوم، از لحاظ مصداق یکسان هستند برای اثبات این امر فرض کنید، F بتواند در تناظر یک به یک با G قرار بگیرد.

براساس این فرض می‌توان نشان داد که مصداق مفهوم «هم‌قوه با F » همانند با مصداق مفهوم «همانند با G » است. همین امر می‌تواند در مورد چیزهای مشابهی که تحت مفهوم «هم‌قوه با G » قرار دارد نیز صادق باشد. مثلاً هرگاه X تحت مفهوم «هم‌قوه با F » قرار گیرد، X مفهومی هم‌قوه با F خواهد بود. بنابراین پنداشت، F هم‌قوه با G است و بنابراین X هم‌قوه با G است. پس X تحت مفهوم «هم‌قوه با G » است. خواننده می‌تواند استدلال مشابهی ترتیب دهد و نشان دهد که هر چیزی که تحت مفهوم «هم‌قوه با G » قرار گیرد، تحت مفهوم «هم‌قوه با F » نیز قرار خواهد گرفت. ولی نتیجه همه این استدلال‌ها یک چیز است این که این مفاهیم، مصداق مشابهی دارند. پس تعریف کلی عدد چنین است:

مصداق مفهوم هم‌قوه با مفهوم F برای یک F (Noonan, 2001, 48)

تعریف اعداد خاص

در این بخش باید کارآمدی معیار کلی تعریف عدد در تعریف اعداد جزئی و خاص سنجیده شود. در جملگی آرای پیشین امکان تعریف عدد صفر فراهم نگردید اما نقطه قوت نظرگاه فرگه ارائه تعریفی برای آن است. از نگاه وی براساس عملگر «مصادق مفهوم F »، عدد صفر، مفهومی است که هیچ مصادقی ندارد. کاندیدای چنین مفهومی، مفهوم «عدم همانند با خود» است. چون هر چیزی همانند با خودش است و چنین مفهومی فاقد هرگونه مصادقی است. پس عدد صفر عبارت است از مصادق «مفهوم هم‌قوه با مفهوم عدم همانندی با خودش» (Collision, 1977, 125). مثلاً «ونوس صفر ماه دارد» تنها معنایش این نیست که هیچ ماه یا مجموعه‌ای ماه وجود ندارد تا چیزی به آن نسبت داده شود. دیگر معنایش آن است که تحت مفهوم «ماه ونوس» هیچ مصادقی قرار ندارد. بنابراین عدد صفر، به مفهوم F تعلق دارد، اگر این قضیه که «زیر مفهوم F هیچ مصادقی قرار نگرفته» پیوسته صادق باشد.

کارکرد جانشینی

برای ارایه تعریف اعداد جزئی افزون بر عملگر «مصادق مفهوم F » به عامل جانشینی هم نیاز داریم. تا برای نمونه بتوان نشان داد که چگونه عدد یک پس از صفر می‌آید یا آن که عدد دو چگونه جانشین عدد یک می‌شود از نگاه فرگه «عدد n بی‌فاصله پس از m می‌آید» معنایی مشابه با عبارت (الف) ذیل دارد:

الف- ابژه مثلاً X زیر مفهوم F قرار گرفته (مصادق) و عدد متعلق به $n \cdot f$ است و عددی که متعلق به مفهوم «قرار گرفتن تحت f اما نابرابر با X » است همان m است.

در عبارت الف، دو مفهوم متفاوت وجود دارد و می‌خواهد براساس رویکرد جانشینی، نشان دهد که n بزرگ‌تر از m است پس جانشین آن می‌گردد. این دو مفهوم عبارت است از:

۱- مفهوم «قرار گرفتن تحت مفهوم F و برابر با X » تحت این مفهوم ابژه و مصادق X قرار دارد و عدد n به عنوان مصادق مفهوم هم‌قوه با خود این مفهوم، به آن تعلق دارد.

۲- مفهوم «قرار گرفتن تحت مفهوم F و نابرابر با X». تحت این مفهوم هر آنچه در مفهوم اولی وجود داشت دیده می‌شود ولی به جز X. و عدد m به عنوان مصداقِ مفهوم هم‌قوه با این مفهوم به آن تعلق دارد.

در نتیجه n براساس تعریف عدد و به خاطر بزرگتر بودن از m جانشین آن می‌گردد. چون عدد n دارای ابژه X است.

این الگوی صوری که با استفاده از عملگر «مصادقِ مفهوم» شکل گرفته و با باور جانشینی اعداد همراه گردید، زمینه‌ای برای تعریف مفهوم اعداد فراهم آورد. برای نشان دادن نمونه‌ای از تعاریف، در مورد اعداد صفر و یک، دوباره به عبارت الف، بازمی‌گردیم (Currie, 1982, P.50).

به جای «مفهوم F» مفهوم «همانند با صفر» قرار دهید و به جای X خود صفر را قرار دهید. حال، عبارت الف خوانده می‌شود: یک مفهوم همانند با صفر وجود دارد و یک شیء تحت آن قرار دارد، یعنی صفر. به نحوی که عدد متعلق به مفهوم «همانند با صفر» عدد n است و عدد متعلق به مفهوم «قرار گرفتن تحت مفهوم همانند با صفر ولی ناهمانند با صفر» m است. به واقع m عددی متعلق به این مفهوم است: «قرار گرفتن تحت مفهوم همانند با صفر اما ناهمانند با صفر». روشن است که چیزی تحت این مفهوم به ظاهر متناقض نیست پس عدد متعلق به آن صفر است. و n عددی است که متعلق به مفهوم «همانند با صفر» است یعنی ابژه‌ای (عدد صفر) تحت آن قرار گرفته، بنابراین n، عدد یک است. و می‌دانیم که معنای عبارت الف این بود که n بی فاصله پس از m می‌آید پس براساس تعریف بالا نتیجه می‌شود که عدد یک بی فاصله پس از صفر قرار می‌گیرد و جانشین آن به شمار می‌آید.

نامتناهی بودن اعداد طبیعی

فرگه در قطعه‌های ۳-۸۲ مبانی علم حساب در صدد نشان دادن این است که هر عدد متناهی یک جانشین دارد و بنابراین به طور نامتناهی عدد وجود دارد. روش وی در اثبات این مطلب به غایت دقیق است و وظیفه دشواری بر عهده گرفته است.

بنابراین روش باید نشان داد که اگر مثلاً m عددی متعلق به مفهوم f ، و عدد متعلق به f جانشین عدد m باشد، از اینجا به مفهوم «تعداد مجموعه n عدد» دست یافته و نشان داده ایم، عددی که متعلق به این مفهوم باشد، جانشین بی واسطه m است. مثلاً صفر، عددی متعلق به مفهوم «چیزی ناهمانند با خودش» است و عدد یک متعلق به مفهوم «همانند با صفر» است. همچنین عدد ۲، عدد متعلق به مفهوم «همانند با صفر یا یک» و همین طور.

به واقع در اینجا دو چیز را ثابت کرده ایم. اولاً جانشین داشتن در همه اعداد طبیعی امری موروثی است و ثانیاً، عدد صفر یک جانشین دارد. برای این اساس جانشین مثلاً عدد m عبارت است از مصداق مفهوم هم‌قوه با مفهوم «عضوی از مجموعه n عدد» (Ibid, 51). به تعبیر دیگر عددی جانشین عدد m است که متعلق به مفهوم «عضوی از مجموعه n عدد» باشد.

اعتبار تعریف عدد طبیعی

تعریف اعداد طبیعی براساس الگوی «همه اعداد طبیعی تحت مفهوم f قرار می‌گیرد، این پرسش را پیش می‌آورد که اعتبار این الگو یا بهتر بگوییم قاعده، بر چه اساسی استوار است. از منظر فرگه اعتباری این الگو بر دوش روش استقرار نهاده می‌شود (Heck, 1998, 775) در استقرار نشان داده می‌شود:

۱- صفر تحت مفهوم f قرار می‌گیرد.

۲- اگر عدد m تحت مفهوم F قرار گیرد، $m+1$ نیز تحت مفهوم F قرار گیرد.

بنا به تعریف، «یک» عدد طبیعی است اگر و تنها اگر تحت مفهوم F قرار گیرد. و مفهوم F مفهومی است که:

(۱') - تحت آن صفر قرار گرفته است.

(۲') - هرگاه تحت مفهوم F ، عدد مثلاً m قرار گرفته باشد، چون جانشین داشتن اعداد،

موروثی است پس تحت این مفهوم، $m+1$ هم قرار می‌گیرد.

می‌توان نتیجه گرفت که برهان استقراء در مورد عدد طبیعی معتبر است، اگر مفهوم F دارای ویژگی‌های (۱) و (۲) باشد و هرآنچه که عدد طبیعی خوانده می‌شود تحت ویژگی‌های موجود در (1') و (2') قرار گیرد. فرض کنید الف متعلق به مفهوم b باشد و مفهوم b دارای ویژگی‌های (1') و (2') باشد. در این صورت مفهوم «عدد طبیعی» که به واقع شرط لازم و کافی این مفهوم است چنین است:

"(1) - بی‌تردید عدد صفر تحت مفهوم عدد طبیعی قرار دارد.

"(2) - هرگاه عدد مثلاً m تحت این مفهوم قرار گیرد، $m+1$ هم تحت آن قرار می‌گیرد.

پس چون m دارای ویژگی‌های (1') و (2') است می‌باید یک عدد طبیعی باشد (Ibid).

نکته پایانی

پاره‌ای از منتقدان فرگه در گذشته اصل هیوم را یک صدق منطقی (truth of logic) تلقی می‌کردند. در این حالت صدق‌های علم حساب پیامد یک صدق منطقی می‌شوند و فلسفه عدد به منطقی‌گرایی بد فرجامی منتهی می‌گردد. امروزه دیگر کمتر کسی به این باور پایبند مانده است. به خصوص آن که خود فرگه چنان که پیش‌تر بیان داشتیم تعریف مفهوم عدد بر اساس اصل هیوم را مورد نقد قرار داد.

به نظر می‌رسد اصل هیوم در صورتی می‌تواند تعریف مناسب فلسفی برای مفهوم عدد طبیعی باشد که پیش از آن که چیستی مفهوم عدد را تبیین نماید درباره چیستی مصداق‌ها توضیح دهد. مایکل دامت با بیان این انتقاد معتقد است که اصل هیوم، اصلی ناسازگار نیست اما در حدود کارایی آن برای تبیین مصداق، تردید وجود دارد (Ibid, p.776). در اصل هیوم که بنا بر آن عدد متعلق به مفهوم F همان عدد متعلق به مفهوم G است، اگر و تنها اگر مفهوم‌های F و G هم‌قوه باشند، برای تعریف مفهوم عدد، تقدم را به «مفهوم» داده است. در حالی که شیوه صحیح تعریف، اساس را بر مصداق قرار می‌دهد و بیان می‌دارد که مصداق F همان مصداق G است اگر و تنها اگر چیزهای مشابهی تحت F و G قرار گرفته باشد.

تأکید فرگه بر «مفهوم» در تعریف عدد نشان می‌دهد که وی تأکید داشت می‌توان محتوای صدق‌های علم حساب را با مدد گرفتن از مفاهیم منطقی تبیین نمود. و مراد وی آن بود که هرگاه صدق‌های علم حساب بر اساس اصول اولیه منطقی استوار شود، استنتاج آنها بنا بر شیوه‌های منطقی، امکان‌پذیر است.

نتیجه

برای پاسخ به پرسش عدد چیست، باید به بررسی شرایط عدد بودن پرداخت، و این مهم در حوزه معرفت‌شناسی امکان‌پذیر نیست. چون در قلمرو شناخت‌شناسی خاستگاه پنداشت و تصور ما از عدد مورد بررسی قرار می‌گیرد و نشان می‌دهد که عدد بنا بر چه شیوه‌ای از رویه‌های شناختی به ما داده می‌شود. آفت مهم نظرگاه‌های روانشناختی، تجربه‌گرایی و انتزاع‌گرایی درباره عدد همین است. اما فرگه با تفکیک میان مفهوم و شیء، پرسش عدد چیست؟ و عدد به چه چیزی نسبت داده می‌شود؟ را از هم جدا می‌سازد. نقطه عطف رویکرد وی همین است. او با مدد گرفتن از مایه‌های فلسفه تحلیلی زبان و اصل متن نشان داد که مهم‌ترین خصلت عدد بودن آن است که عدد به یک مفهوم نسبت داده می‌شود. گرچه رویکرد دوم وی که عدد را براساس الگوی «عدد مثلاً X مصداق مفهوم هم‌قوه با X » تعریف می‌کند، پیش روی قابل ملاحظه‌ای به شمار می‌آید، اما گرایش وی به مبانی منطقی در تبیین مفهوم عدد، نظرگاه وی را به آفت منطقی‌گرایی دچار می‌سازد چراکه اساس تعریف عدد، بر مفهوم نهاده شده و از تعریف مصداق اثری دیده نمی‌شود.

منابع

- Collinson, Diane (1977): *fifty major philosophers*, A Reference Guide, Routledge, London and New York.
- Currie, Gregory (1982), *Frege: an introduction to his philosophy*, 1st. Prt, Brighton, Sussex. Harvester press.
- Dummett, Michael (1967): *Frege Gottlob*, In *encyclopedia of philosophy*, editor in chief p.EDWARDS. vol 3
- Dummett, Michael (1991): *philosophy of mathematics*, Duckworth, chapter 7, 8.
- Frege, Gottlob (1884): *The foundation of Arithmetic*, trans., J.L., Austin (Blackwell, Oxford 1950)
- Frege, G: (1892) *uber Begriff and Gegenstand*, *vierteljahrsschrift fur wissenschaftliche philosophie vol 16*.tr by Peter Geach as: on concept and object, in Geach and Black.
- Frege, G (1968): *The foundation of Arithmetic*, tr. of Frege 1884 by J.L Austin, with German text, Oxford: Blackwell
- Grossmann, R (1986): *phenomenology and existentialism*, an introduction, Routledge and Kegan Paul.
- Heck, Richard (1998): *Frege G*, in *encyclopedia of philosophy*, Routledge vol 3
- Noonan, H (2001) *Frege A critical introduction*, Polity press
- Scruton, Roger (1991): *A short history of modern philosophy*, Routledge, London. chapter 17.