

Paraconsistency, Relevance and Vagueness: a proof theoretic approach to fuzzy relevant logic FR

Lotfollah Nabavi¹  | Seyed Ahmad Mirsanei² 

1. Corresponding Author, Professor, Department of Philosophy, Wisdom, and Logic, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran. Email: nabavi_1@modares.ac.ir
2. PhD Candidate in Philosophical Logic, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran. Email: sa.mir@modares.ac.ir

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received 27 December 2025

Received in revised form 14
January 2026

Accepted 19 February 2026

Published online 18 July 2026

Keywords:

Relevance, Relevance Criteria,
Vagueness, Fuzzy Relevant
Logic, Proof Theory, FR

ABSTRACT

In scientific and even in everyday reasoning, and also in our intuitive understanding, relevance-preserving is of particular importance alongside truth-preserving. In another hand, we deal with many reasonings that are approximate and are true to a certain degree. In this article, considering two important categories in natural language and logic, namely "relevance" and "vagueness", with a formal approach, and in continuation of the work of the my MSc's thesis entitled "Fuzzy Relational Logic: A Propositional Approach", we present a Hilbert-style system and a hypersequent calculus as proof theories for fuzzy relevant semantics, and introduce logics are constructed whose reasoning is both fuzzy and relevant, and are called fuzzy relevant logics. Some fuzzy relevant logics (such as FRM) are obtained by eliminating the constants F and T, and some others are obtained without eliminating these constants and by adding the guaranteeing logical rules of prelinearity and excluded middle. In addition to the considerations of proof theory, the metatheorems of these logics will be addressed and the soundness and completeness (or incompleteness) will be proven with respect to ordered linear algebras (matrices). Philosophical considerations based on these proof theories and also the investigation of structural rules for resolving vagueness paradoxes are among the philosophical considerations of this research.

Cite this article: Nabavi, L. & Mirsanei, A. (2026). Paraconsistency, Relevance and Vagueness: A Proof Theoretic Approach to Fuzzy Relevant Logic FR. *Journal of Philosophical Investigations*, 20 (55), 325-352. <https://doi.org/10.22034/jpiut.2026.70950.4391>



© The Author(s). Publisher: University of Tabriz.

* Derived from PhD Thesis of Seyyed Ahmad Mirsanei. Titled as "Proof Theory for non-t-norm substructural fuzzy relevant logics", Supervised by Dr. Lotfollah Nabavi in Tarbiat Modares University (2026)

Extended Abstract

Fuzzy logic challenges the bivalence principle of classical logic and relevant logic challenges the barrier of classical logic and the category of material implication. The purpose of fuzzy relevant logic is, firstly, like relevant logic, to eliminate the paradoxes of material implication, and secondly, like fuzzy logic, to eliminate bivalence paradoxes such as the liar paradox and sorites paradoxes, etc., and finally to achieve logics that their reasoning is both relevant and approximate. The main task of fuzzy relevant logic, as defined by Priest, is to fuzzify relevant logics in order to achieve logic or logics that contain fuzzy and relevant reasoning (Priest, 2008. 231)

The research method in this article was, first, the axiomatic method, and in this regard, the basic theories of the research are explained and expanded. In this way, first, with a propositional approach, the axiomatic, and sequent and hypersequent calculus proof theory of the various versions of relevant logic R, pretabular logic LR and fuzzy relevant logics RM, UL and FR and their extensions were formulated and presented. Corresponding to these axiomatic systems, the algebraic semantics and corresponding algebraic varieties of each were examined, soundness and completeness meta-theorems was studied with respect to these varieties and linearly ordered matrices for those systems.

Secondly, the method of this research was descriptive-analytical, and in this research, as a theoretical and fundamental research, with the method of logical analysis and the use of non-algorithmic axiomatic method and algorithmic sequent and hypersequent calculus methods, as well as algebraic methods, the justification and verification or refutation of the research hypotheses, namely the completeness or incompleteness of the axiomatic and hypersequent calculus of fuzzy relevant logics, was studied. In this research, by an a priori-deductive approach and by considering the consistency, soundness and completeness of FR with respect to Routley-Meyer semantics and also algebraic semantics of UL with respect to linearly ordered matrices, and their propositional extensions, and also with the help of some intermediate theories (from fuzzy, relevant and linear algebraic semantics), the research theory (as a coherent set of related theorems presented in the hypotheses section) was proven.

In this paper, by examining new works in the field of fuzzy extensions of relevant logic R, and discovering extensional relations between various fuzzy, linear, and relational logics in the neighborhood of FR fuzzy relevant logic, it was shown that the axiomatic systems and the hypersequent calculus presented for FR are strongly complete with respect to the semantics presented for various versions of FR, including algebraic semantics (with respect to the class of all chains, including Demorgan monoids and those with linear order) and Routley-Meyer semantics. However, the direct proof of completeness and also the decidability of the strong versions of FR, namely FR^T and FR^l , is still an open problem, and it is hoped that we will achieve answers to these questions in future research.

Philosophical considerations based on the proof theories introduced and described, as well as the study of structural rules for resolving vagueness and relevant paradoxes, are among the philosophical considerations and philosophical applications of this paper in next research. Also, the description extension of fuzzy relevant logic FR and its use in artificial intelligence (AI) as a basic logic for knowledge representation and reasoning and knowledge graphs and the application of these graphs in symbolic artificial intelligence (symbolic AI), robotics, and

semantic web topics, as well as its implementation in several large ontologies and the construction of expert AI assistant are other practical points of this study.



فراسازگاری، ربط و ابهام: رویکردی نظریه برهانی به منطق فازی ربطی FR

لطفاله نبوی^۱ | سیداحمد میرصانعی^۲

۱. نویسنده مسئول، استاد گروه فلسفه و حکمت و منطق دانشگاه تربیت مدرس، ایران. رایانامه: nabavi_l@modares.ac.ir

۲. دانشجوی دکتری منطق فلسفی، دانشگاه تربیت مدرس، ایران. رایانامه: sa.mir@modares.ac.ir

چکیده	اطلاعات مقاله
در استدلال‌های علمی و حتی در استدلال‌های روزمره و در درک شهودی ما، ربط‌نگهداری در کنار صدق‌نگهداری از اهمیت خاصی برخوردار است. از جهتی ما با بسیاری از استدلال‌هایی سر و کار داریم که تقریبی‌اند و تا درجه خاصی درست هستند. در این مقاله، با توجه به دو مقوله مهم در زبان طبیعی و منطق، یعنی «ربط» و «ابهام»، با رویکردی صوری، و در ادامه کار پایان‌نامه کارشناسی ارشد با عنوان «منطق فازی ربطی: رویکردی گزاره‌های» به ارائه سیستم اصل موضوعی و نظریه برهانی (گزاره‌ای) برای سمانتیک‌های فازی ربطی پرداخته، و منطق‌هایی ساخته می‌شوند که استدلال آن‌ها هم فازی است و هم ربطی، و منطق‌های فازی ربطی نام دارند. بعضی از منطق‌های فازی ربطی (مانند FRM) با حذف ثوابت F و T و بعضی دیگر بدون حذف این ثوابت و با افزودن اصل تضمین‌گر قواعد منطقی پیش‌خطی و نیز طرد شق ثالث به دست می‌آیند. علاوه بر ملاحظات نظریه برهانی، به فراقضایای این نظام‌های منطقی پرداخته و صحت و تمامیت (یا ناتمامیت) با نظر به جبرهای مرتب خطی (ماتریس‌ها) اثبات خواهد شد. ملاحظات فلسفی بر مبنای نظریه برهان ارائه شده و نیز بررسی قواعد ساختاری، برای حل پارادوکس‌های ابهام، از جمله ملاحظات فلسفی این پژوهش است.	نوع مقاله: مقاله پژوهشی تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۱۰/۰۶ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۱۰/۲۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۱۱/۳۰ تاریخ انتشار: ۱۴۰۵/۰۴/۲۷ کلیدواژه‌ها: ربط، معیارهای ربط، ابهام، منطق فازی ربطی، نظریه برهان، منطق FR

استناد: نبوی، لطفاله و میرصانعی، سیداحمد. (۱۴۰۵). فراسازگاری، ربط و ابهام: رویکردی نظریه برهانی به منطق فازی ربطی FR، پژوهش‌های فلسفی، ۲۰ (۵۵)، ۳۲۵-۳۵۲. <https://doi.org/10.22034/jpiut.2026.70950.4391>



ناشر: دانشگاه تبریز. © نویسندگان.

* برگرفته از رساله دکتری سید احمد میرصانعی با عنوان «نظریه برهان برای منطق‌های زیرساختی فازی ربطی غیر t-نرمی» به راهنمایی دکتر لطفاله نبوی، دانشگاه تربیت مدرس، ۱۴۰۵.

مقدمه

سابقه ادات تابع ارزشی «استلزام مادی»: $\supset$ به فرگه در کتاب *مفهوم نگاشت*، وایتهد و راسل در کتاب *اصول ریاضیات*^۱ (۱۹۱۰-۱۹۱۳) می‌رسد. هنوز جوهر ویراست اول *اصول ریاضیات* وایتهد و راسل خشک نشده بود، که انتقادات وسیعی بر ضد استلزام مادی شکل گرفت، و از جمله سی. آی. لویس^۲ در مقاله (لویس، ۱۹۱۲، ۵۲۲-۵۳۱) پارادوکس‌های «استلزام مادی» را آشکارا به چالش کشید، مهم‌ترین نقد لویس بر راسل در این مقاله، مشکلاتی است که استلزام مادی $\supset$ به وجود می‌آورد. پس از آن در کتاب *بررسی منطق نمادین*^۳ در سال ۱۹۱۸ نقدهای خود را کامل کرده و در سال ۱۹۳۲ کامل‌ترین کتاب خود را در زمینه نقد استلزام مادی با عنوان *منطق نمادین*^۴ با همکاری لنگفورد^۵ می‌نگارد، و در واقع می‌خواهد منطق موجهاتی بنا نهد که پایه آن منطق موجهات باشد و نه منطق کلاسیک مبتنی بر استلزام مادی. پارادوکس‌های مشهور استلزام مادی که لویس به آن‌ها اشاره می‌کند عبارتند از (نبوی، ۱۳۸۸):

- (۱) پارادوکس مثبت: هر گزاره‌ای مسلزم یک گزاره صادق است: $A \supset (B \supset A)$
 - (۲) پارادوکس منفی: یک گزاره کاذب، مستلزم هر گزاره‌ای است: $\sim A \supset (A \supset B)$
 - (۳) پارادوکس منتج از کذب (EFQ): از گزاره نامعتبر هر گزاره‌ای را می‌توان نتیجه گرفت: $(A \wedge \sim A) \supset B$
 - (۴) پارادوکس منتج به صدق (EQT): گزاره معتبر از هر گزاره‌ای به دست می‌آید: $A \supset (B \vee \sim B)$
 - (۵) پارادوکس انفصال: از بین هر دو گزاره، یا اولی مستلزم دومی است یا بالعکس. $(A \supset B) \vee (B \supset A)$
- لویس برای گذار از این پارادوکس‌ها منطق پایه جدیدی طراحی می‌کند. سیستم اول او S1 است و در آن به جای استلزام مادی، از «استلزام اکید»: $\rightarrow$ استفاده کرد و سپس بر مبنای S1، چهار سیستم دیگر با اضافه کردن اصول موضوعه جدید می‌سازد: S2، S3، S4 و S5. سیستم S5 در میان منطق دانان پذیرفته‌تر از بقیه بود، هرچند خود لویس نظام S2 را ترجیح می‌داد. اگر به جای استلزام مادی در پارادوکس‌های استلزام مادی، استلزام اکید بگذاریم، پارادوکس‌هایی که تعداد دو استلزام اکید دارند دیگر قضیه سیستم نیستند؛ اما EFQ و EQT که یک ادات استلزام اکید دارند، تقویت شده و لویس نیز سعی می‌کند با اثبات آن‌ها، با آن‌ها کنار بیاید و مثلاً در EFQ، گزاره $(p \wedge \sim p)$ اکیداً مستلزم q خواهد بود. حتی لویس و لنگفورد مستقلاً براینی برای اثبات درستی این دو اصل ارائه می‌دهند و از جمله لویس، در استدلالی که مبتنی بر قاعده پارادوکسی قیاس انفصالی است، برای EFQ می‌آورد و آن را می‌پذیرد:^۶

- | | |
|----------------------|--------------|
| 1. $A \wedge \sim A$ | مقدمه |
| 2. A | حذف عاطف (۱) |
| 3. $\sim A$ | حذف عاطف (۱) |
| 4. $A \vee B$ | م (۲) $\vee$ |
| 5. B | ق.ا. (۳) (۴) |

^۱ *Principia mathematica*

^۲ C I Lewis

^۳ *A Survey of symbolic Logic*

^۴ *Symbolic Logic*

^۵ C H Langford

^۶ البته لازم به ذکر است که لویس در مقاله ۱۹۱۷ تحت عنوان «مسائل مربوط به استلزام مادی»، با طراحی دیالوگی بین خودش و یک فرد فرضی به اسم X، به پارادوکسی بودن این برهان پی می‌برد (لویس، ۱۹۱۷)

معرفی شرطی (۵-۱) 6. $(A \wedge \sim A) \rightarrow B$

با توجه به توفیق نسبی و نه کامل لوئیس در حل کامل پارادوکس‌های استلزام مادی، پس از او (و حتی معاصر با وی) مثلاً در کارهای منطق‌دان روسی، ایوان ای. ارلف در (۱۹۲۸)) تلاش‌های جدی برای حل کامل پارادوکس‌های استلزام مادی، توسط منطق‌دانان ربط صورت گرفت تا پارادوکس‌های استلزام مادی را، هم در صورت استلزامی و هم در صورت استنتاجی رفع کنند. در منطق ربط علاوه بر توجه به بحث ربط در شرطی، به وجود ربط بین مقدمات و نتیجه (یا نتایج) در استدلال نیز توجه میشود و بنابراین هم گزاره شرطی باید ربطی باشد و هم استدلال.

منطق‌های ربط فراسازگار و فراتمام هستند، به این معنا که هم اصل (EFQ) را رد می‌کنند، و هم اصل EQT را؛ هرچند این معمولاً انگیزه اصلی منطق‌های ربط نیست. بلکه هدف این منطق‌ها رفع نتایج خلاف شهود و پارادوکس‌های استلزام مادی است (مرز؛ ۲۰۲۰، بخش ۳). منطق کلاسیک، شرطی مادی را صرفاً با اصطلاحات صرفاً تابع ارزشی تعریف می‌کند، به این صورت که $p \rightarrow q$ کاذب است، اگر و تنها اگر، هم p صادق باشد و هم q کاذب، و در غیر این صورت شرطی صادق خواهد بود.

$\supset$	F	T
F	T	T
T	F	T

و جدول ارزش ادات $\supset$ هم به خوبی این دو پارادوکس را منعکس می‌کند. بنابراین در شرطی مادی، فرقی نمی‌کند که مقدم و تالی به هم ربط داشته باشند، و هر نوع شرطی، چه لزومی و چه اتفاقی (متناظر با تعبیر منطق‌دانان قدیم در تقسیم‌بندی شرطیات متصله) را شامل می‌شود. برای مثال، گزاره‌ای مانند «اگر بعضی کلاغ‌ها پرند نیستند، تمام انسان‌ها سه چشم دارند» به کذب مقدم همواره صادق است، حتی بدون این که ربطی اصلاً بین مقدم و تالی باشد.

منطق‌های ربط با لحاظ شرط ربط بین مقدم و تالی در شرطیات، سعی در حل پارادوکس‌های استلزام مادی دارند. به عبارت دیگر، یکی از اشکالات پارادوکس‌های استلزام، پیوند و گره ناکافی (و به قول لوئیس: فقدان ربط) بین مقدم و تالی، و یا مقدمات و نتیجه است. یکی از تضمین‌های منطق‌های ربط این است که استلزامات منطقاً صادق استلزاماتی هستند که مقدم‌هایشان مرتبط با نتیجه است. آکرمان^۱ (۱۹۵۶) پدر نظریه استلزام ربطی، می‌گوید: «باید ارتباطی بین محتوای^۲ مقدم و محتوای تالی باشد». ولی یک مسأله بر سر راه این ادعای منطق‌دانان ربط وجود دارد و آن این که، مقوله «ربط» غالباً مرتبط با محتوای گزاره‌ها است، و حال آن که منطق‌ها سیستم‌های نحوی صوری هستند (خواه مجموعه‌ای از براهین معتبر باشند، و خواه مجموعه‌ای از قضایا) و بنابراین چگونه منطق‌های ربط خواهند توانست شرایطی نحوی برای جلوگیری از عدم ربط بین مقدم و تالی ارائه نمایند؟ این مشکل و شکاف بین نحو و معناشناسی، تا حد زیادی با اصل نحوی «اشتراک‌گذاری متغیر»^۴ برطرف می‌شود.

¹ E Mares² Wilhelm Ackermann³ Content⁴ Variable Sharing

۱. نسخه‌های گوناگون منطق R و RM

بسیاری از منطق‌ها با یا بدون ثوابت گزاره‌ای استنتاجاً معادل هستند، زیرا ثوابت در زبان آن‌ها قابل تعریف هستند. برای مثال در منطق کلاسیک گزاره‌ای، ثوابت T و F به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \phi \vee \sim \phi$$

$$F = \perp \stackrel{\text{def}}{=} \phi \wedge \sim \phi$$

در بعضی منطق‌ها و از جمله منطق‌های ربط R و RM از آن جایی که ثوابت در زبان فاقد ثوابت قابل تعریف نیستند، نسخه‌های گوناگونی از این منطق‌ها با و بدون ثوابت خواهیم داشت که استنتاجاً معادل نخواهند بود.

از میان ۳ منطق ربط مشهور E، T و R، منطق ربط R به دلیل این که ادات استلزام آن صرفاً ربطی است (و مثلاً مانند E چنین نیست که ادات استلزام آن هم ربطی باشد و هم ضروری)، بعضی از منطق‌دانان ربط (و برای مثال، مایکل دان^۱ و مایر^۲) منطق R را بر منطق E و T ترجیح می‌دهند. از جهتی، نسخه‌های گوناگونی از منطق R در آثار منطق‌دانان ربط دیده می‌شود که استنتاجاً با هم معادل نیستند. از جمله سه نسخه R^o بدون ثوابت (ضعیف‌ترین)، R^T واجد تمام ثوابت (قوی‌ترین)، و R^t واجد ثوابت t و f و فاقد ثوابت T و F (بین دو نسخه پیش): $R^o < R^t < R^T$

نسخه مرجع و غالب در ادبیات منطق‌دانان ربط، R^t است،^۳ و نسخه R^o را هم به عنوان پاره فاقد ثابت t منطق R^t در نظر می‌گیرند (اندرسون، بلنپ و دان، ۱۹۹۲، ۴۵۰؛ دان، ۲۰۰۰، ۱۸)

پیش از معرفی نظام نحوی این سه نسخه از منطق R، ذکر این نکته لازم است که تعاریف در زبان‌های منطقی به دو دسته تقسیم می‌شوند:

- تعاریف زبان شیء‌ای: تعاریفی که در زبان صوری و با استفاده از واژگان موجود در زبان ارائه می‌شوند؛ مانند تعریف ثوابت T و F و یا ادات دوشروطی در منطق کلاسیک گزاره‌ای.
- تعاریف فرازبان: تعاریف غیرزبانی (و غیر صوری)؛ مانند تعاریف غیرصوری ثوابت در منطق‌های ربط R و RM که متناظر با نقش آن ثوابت در براهین صحت و تمامیت این منطق‌هاست.

تعریف فرازبانی ثوابت گزاره‌ای f، t، T و F در منطق‌های ربط به ترتیب به صورت زیر است (اندرسون، بلنپ و دان، ۱۹۷۵) (رید، ۱۳۸۵، ۱۵۵):

t: عطف تمام جملات صادق زبان

f: فصل تمام جملات کاذب زبان

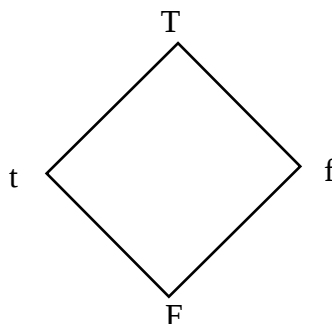
T: فصل تمام جملات زبان شیء‌ای

F: عطف تمام جملات زبان شیء‌ای

^۱ J Michael Dunn

^۲ Robert K Meyer

برای نمونه، ر ک: (اندرسون، بلنپ و دان، ۱۹۹۲)، (دان و رس‌تال، ۲۰۰۲)، (مرز، ۲۰۰۴)، (مایر و راوتلی، ۱۹۷۳)، (مایر و همکاران، ۱۹۸۴) و ^۳ (راوتلی و مایر، ۱۹۷۲)



شکل ۱-۱. رابطه شبکه‌ای بین ثوابت گزاره‌ای

زبان صوری ضعیف‌ترین نسخه گزاره‌ای R ، یعنی R^0 ، به صورت زیر است:

الف. واژگان: فهرستی نامتناهی و شمارا از گزاره‌نماها: $P, P_i, P', P'', \dots, Q, Q_i, Q', Q'', \dots, R, R_i, R', R'', \dots$ و $\dots$ و $(i \in \mathbb{N})$

و در فرازبان: فهرستی نامتناهی و شمارا از فراگزاره‌نماها: $\phi, \psi, \dots$

ثوابت منطقی: ادات‌های منطقی $\rightarrow$ و $\neg$ و ادات‌های مصداقی $\wedge$ و $\vee$

علائیم نقطه‌گذاری: $(,)$

ب. قواعد ساخت:

۱. فرمول اتمی: هر گزاره‌نما یک فرمول است.

۲. فرمول مرکب با ادات تک‌موضعی: اگر ϕ فرمول باشد، $\neg \phi$ نیز فرمول است.

۳. فرمول مرکب با ادات دوموضعی: اگر ϕ و ψ دو فرمول باشند، $\phi \rightarrow \psi$ ، $\phi \wedge \psi$ و $\phi \vee \psi$ نیز فرمول هستند.

ج. تعاریف (زبانی): (ادات‌های عطف معنایی $(\circ)$ و دوشروطی معنایی $(\leftrightarrow)$)

$$\phi \circ \psi \stackrel{\text{def}}{=} \neg (\psi \rightarrow \neg \phi)$$

$$\phi \leftrightarrow \psi \stackrel{\text{def}}{=} (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$$

و سیستم استنتاجی اصل موضوعی R^0 هم به صورت زیر است:

۱. اصول موضوعه:

- A1. $\phi \rightarrow \phi$
- A2. $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \phi$, $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \psi$
- A3. $((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\phi \rightarrow (\psi \wedge \chi))$
- A4. $\phi \rightarrow (\phi \vee \psi)$, $\psi \rightarrow (\phi \vee \psi)$
- A5. $((\phi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \vee \psi) \rightarrow \chi)$
- A6. $(\phi \wedge (\psi \vee \chi)) \rightarrow ((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi))$
- A7. $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$
- A8. $(\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$
- A9. $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \leftrightarrow (\psi \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$
- A10. $(\phi \rightarrow \neg \phi) \rightarrow \neg \phi$
- A11. $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg \phi)$
- A12. $\neg \neg \phi \rightarrow \phi$

۲. قواعد استنتاجی:

- وضع مقدم (MP): $\phi \rightarrow \psi, \phi \vdash \psi$

- الحاق (Adj): $\phi, \psi \vdash \phi \wedge \psi$

R^T و R^t با تغییراتی مختصر در زبان صوری R° و توسیع اصل موضوعی آن به دست می‌آیند. زبان صوری R^t با افزودن دو ثابت اصلی t و f به زبان صوری R° و حذف ادات اصلی $\neg$ به دست می‌آید. بدین ترتیب، ادات نقض $\neg$ در R^t اداتی فرعی خواهد بود که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\neg\phi \stackrel{\text{def}}{=} \phi \rightarrow f$$

سیستم اصل موضوعی R^t هم با افزودن دو اصل موضوع زیر به R° دست می‌آید:

A13. t

A14. $\phi \leftrightarrow (t \rightarrow \phi)$

و اصول موضوعه A10 تا A12 در R^t به صورت زیر خواهند بود:

A10. $(\phi \rightarrow (\phi \rightarrow f)) \rightarrow (\phi \rightarrow f)$

A11. $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow f) \rightarrow (\phi \rightarrow f))$

A12. $((\phi \rightarrow f) \rightarrow f) \rightarrow \phi$

R^T نیز با افزودن دو ثابت اصلی T و F و دو اصل موضوع زیر به R^t دست می‌آید:

A15. $F \rightarrow \phi$ (EFQ)

A16. $\phi \rightarrow T$ (EQT)

به عنوان مثال، قضایای زیر در R^t یا R^T قابل اثبات هستند:

$$\vdash_{R^t} (\phi \wedge t) \rightarrow (t \vee \psi)$$

$$\vdash_{R^T} ((\phi \rightarrow F) \circ \phi) \rightarrow \psi$$

$$\vdash_{R^t} (\phi \wedge t) \rightarrow (\psi \vee \neg\psi)$$

$$\vdash_{R^T} ((\phi \rightarrow F) \wedge \phi) \rightarrow \psi$$

برای نمونه، اثبات $(\phi \wedge t) \rightarrow (t \vee \psi)$ در R^t به صورت زیر است:

1. $(\phi \wedge t) \rightarrow t$ A2

2. $t \rightarrow (t \vee \psi)$ A4

3. $[(\phi \wedge t) \rightarrow t] \rightarrow \{[t \rightarrow (t \vee \psi)] \rightarrow [(\phi \wedge t) \rightarrow (t \vee \psi)]\}$ A7

4. $[t \rightarrow (t \vee \psi)] \rightarrow [(\phi \wedge t) \rightarrow (t \vee \psi)]$ وضع مقدم (۳)(۱)

5. $(\phi \wedge t) \rightarrow (t \vee \psi)$ وضع مقدم (۴)(۲)

¹ Adjunction

۲. معیارهای ربط

امروزه با توسعه منطق‌های نمادین و به ویژه منطق‌های غیر کلاسیک، با گستره وسیعی از منطق‌هایی مواجه هستیم که ربطی به حساب می‌آیند. البته در معیارهای ربطی بودن یک منطق از ابتدای پیدایش سیستم‌های منطق ربط اختلاف نظرهای متعددی وجود داشته است که در دو زیربخش زیر بدان‌ها خواهیم پرداخت، اما اجمالاً و با رویکردی حداقلی، منطقی ربطی خواهد بود که حداقل ۳ شرط زیر را برآورده سازند:

(۱) جلوگیری از پارادوکس‌های استلزام مادی و اتخاذ شیوه‌ای برای ارتباط با تناقضات و دیگر امور ناممکن به نحو غیربی‌مایه^۱

(۲) برآورده ساختن شرط «اشتراک‌گذاری متغیر»

(۳) داشتن یک رابطه استنتاج‌پذیری که تمام مقدمات در یک استنتاج معتبر قابلیت استفاده در آن استنتاج را داشته باشند و نیز برآورده ساختن قضیه استنتاج.

۲-۱. اشتراک‌گذاری متغیر

یکی از معیارهای ربطی بودن استلزام و استدلال و در نتیجه ربطی بودن یک منطق، شرط «اشتراک‌گذاری متغیر» (و یا فراقضیه متغیر مشترک (فلاحی، ۱۳۹۱، ۳۲۹)) است. راسل و وایتهد در جلد اول کتاب *اصول ریاضیات* در زمینه به اشتراک‌گذاری متغیر در گزاره‌های ریاضیات حساب پثانو چنین می‌گویند (راسل و وایتهد، ۱۹۰۳، ج. ۱، ص. ۳):

ریاضیات محض کلاسیک مجموعه‌ای از تمام گزاره‌های دارای فرم « p مستلزم q است» است که p و q گزاره‌هایی شامل یک متغیر یکسان یا بیشتر هستند، و هیچ‌کدام از p و q دارای ثوابتی به جز ثوابت منطقی نیستند.

از نظر راسل و وایتهد (۱۹۰۳ و به تبعیت از پثانو)، اولاً احکام ریاضیات استلزامات صوری هستند، و ثانیاً، گزاره‌های طرفین استلزام باید دقیقاً دارای متغیرهای یکسانی باشند. البته لازم به ذکر است که متغیرهای راسلی معمولاً متغیرهای گزاره‌ای مورد بحث در شرط اشتراک‌گذاری متغیر منطق‌دانان ربط نیستند، بلکه منظور راسل استلزامات ریاضیاتی صوری است که گزاره‌هایی را به هم مرتبط می‌سازند که دارای محتوای مشترک هستند. (فرض بر این است که این گزاره‌ها در مورد اموری مشترک هستند.) شرط اشتراک‌گذاری متغیر (به عنوان یک فرامعیار^۲ یا فرااصل^۳) یک شرط لازم و نه شرط کافی برای ربطی بودن یک منطق است. دلیل این امر هم این است که کسی که صرفاً تمام قضایای منطق کلاسیک که این شرط را برآورده می‌سازند را می‌پذیرد، باز هم درگیر پارادوکس‌های زیر و بسیاری دیگر از پارادوکس‌ها خواهد بود (مِرز و مایر، ۲۰۰۱، ۲۸۳):

$$p \rightarrow (q \rightarrow p)$$

$$\sim(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r)$$

معیارهای گوناگونی توسط منطق‌دانان برای ربطی بودن یک منطق بر مبنای معیار به اشتراک‌گذاری متغیر ارائه شده است. از جمله مهم‌ترین این معیارها، تا قبل از معیارهای اونسوک یانگ^۴ (۲۰۱۲)، می‌توان به ۳ معیار زیر اشاره نمود:

^۱ Non-Trivial

^۲ Meta-Criteria

^۳ Meta-Principle

^۴ Eunsuk Yang

- (۱) معیار اندرسون^۱ و بلنپ^۲ (۱۹۶۲): منطق‌هایی که اصل ربطی RP را صدق‌پذیر سازند، منطق ربط هستند:
- « $\phi \rightarrow \psi$ یک قضیه است، تنها اگر ϕ و ψ دارای یک متغیر گزاره‌ای مشترک باشند.»
- (۲) معیار مایکل دان (۱۹۷۰ و ۱۹۸۶): یک سیستم منطقی، ربطی است، اگر اصل ربطی ضعیف (WRP) زیر را صدق‌پذیر سازد:
- « $\phi \rightarrow \psi$ یک قضیه است، تنها اگر ϕ و ψ دارای یک متغیر گزاره‌ای مشترک باشند، یا $\phi \sim \psi$ قضیه باشند.»
- (۳) معیار راوتلی^۳ و همکاران (۱۹۸۲): از نظر راوتلی و همکاران، RP شرط لازم و نه کافی برای ربطی بودن یک منطق است و بنابراین، معیار حذف قاعده پنهان‌سازی (قضایا)^۴ را به عنوان شرط کافی برای ربطی بودن یک منطق معرفی نمودند (یانگ، ۲۰۱۵، ۴۳۸) بر مبنای قاعده پنهان‌سازی قضایا، مجاز هستیم هر قضیه مانند A را از مقدم یک شرطی حذف کنیم (راوتلی و همکاران، ۱۹۸۲، ج. ۱، ۲۲۷؛ رید، ۱۳۸۵، ۱۳۶-۱۳۳؛ فلاحی، ۱۳۹۱، ۱۴۱ و ۳۸۳):
- قاعده پنهان‌سازی قضایا: $A \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow B$
- صورت خاص از فرم قضیه‌ای این قاعده به صورت زیر است (هر شرطی که مقدم آن راستگوی منطقی باشد، مستلزم تالی خود می‌باشد):
- $((A \rightarrow A) \rightarrow B) \rightarrow B$
- از نظر راوتلی و همکاران، اصل پنهان‌سازی قضایا، اصلی هست که اطلاعات مورد نیاز برای حرکت به طور کلی از مقدم‌ها به تالی‌ها را پنهان می‌سازد (راوتلی و همکاران، ۱۹۸۲، ج. ۱، ۱۴۱) و بنابراین به عنوان یک معیار برای کنار گذاشتن (اصول) پنهان‌سازی، مقدم یک استلزام (به عنوان یک قضیه)، باید شرط کافی برای تالی آن باشد (راوتلی و همکاران، ۱۹۸۲، ج. ۱، ۱۴۱-۱۵۳). فلاحی (۱۳۹۱) نیز قاعده پنهان‌سازی قضایا را مغالطی دانسته و دلیل نادرستی آن را، نادرستی قاعده «صدور» در منطق ربط می‌داند (فلاحی، ۱۳۹۱، ۱۴۱ و ۳۸۳).
- از بین معیارهای فوق، بر مبنای معیار اول، منطق ربط R^0 (فاقد ثوابت) بر اساس این معیار منطق ربط است، اما دو نسخه دیگر و قوی‌تر منطق R، یعنی R^t و R^T و هیچ کدام از سه نسخه RM (یعنی RM^0 و RM^t و RM^T) به این معنا ربطی نیستند. همچنین، سیستم‌های ربطی با ثوابت گزاره‌ای (مانند منطق‌های ربط در مقاله گالاتوس و همکاران (۲۰۱۷) و نیز رستال (۲۰۰۰)) منطق ربط نخواهند بود. بر مبنای معیار دوم منطق R^0 (فاقد ثوابت) منطق ربط است، و منطق RM^0 هم نیمه ربطی است، اما دو نسخه دیگر و قوی‌تر منطق R^0 ، یعنی R^t و R^T و نیز RM^t و RM^T به این معنا حتی نیمه ربطی هم نیستند. از جهتی بر مبنای معیار سوم، یعنی معیار راوتلی و همکاران نیز بسیاری از منطق‌های ربط و از جمله منطق R ربطی به حساب نمی‌آیند.

همان‌طور که دیده می‌شود نسخه مشهور منطق ربط R، یعنی نسخه R^t با هیچ یک از سه معیار فوق ربطی نخواهد بود. از جهتی اگر بخواهیم لااقل به یکی از این سه معیار پایبند بمانیم، حتی با کنار زدن نسخه‌های قوی منطق ربط R، یعنی R^t و R^T و اکتفا به نسخه R^0 و استفاده از توسیع پایستار^۵ برای ساختن سایر منطق‌های ربط هم کار پر هزینه‌ای خواهد بود؛ زیرا با

¹ Anderson

² Belnap

³ Routley

⁴ suppression rule avoidance

⁵ Conservative extension

مثال‌های نقض گوناگون و از جمله این مثال نقض که، توسیع پایستار R° با نقض بولی منطق ربط نخواهد بود، مواجه خواهیم شد (ر.ک.: (راوتلی و مایر، ۱۹۷۴؛ مایر، ۱۹۷۴؛ اندرسون، بلنپ و دان، ۱۹۹۲)).

یانگ در مقاله خود، با بازبینی اصول و معیارهای ربط، راه‌حل این مشکل را توجه به تمایز معیارهای معنایی و معیاری مصداقی ربطی بودن دانسته و معیارهای جدیدی برای ربطی بودن یک نظام منطقی ارائه می‌دهد (یانگ، ۲۰۱۲).^۱ از نظر او، معیار مصداقی ربطی بودن یک منطق، معیار به اشتراک گذاری متغیر RP ، یعنی همان معیار اندرسون و بلنپ (۱۹۶۲) است، اما علاوه بر آن معیاری هم برای به اشتراک گذاری معنا و محتوا نیز مورد نیاز است که در بر دارنده هم اشتراک گذاری متغیر به نحو صریح (که جلوتر توضیح آن خواهد آمد) باشد و هم ویژگی‌های ثوابت را نیز در بر داشته باشد. مثلاً بر مبنای اصل ربطی صریح ERP ^۲ یانگ (که جلوتر توضیح آن خواهد آمد)، هر ۳ نسخه منطق ربط R ربطی هستند، ولی هیچ کدام از ۳ نسخه RM ربطی نیستند. یانگ در ادامه این روند تغییر و اصلاح معیارهای ربطیت و برای رفع مشکلات فوق، به ۲ بازبینی در معیار معنایی ERP بر مبنای مقاله گاتالوس^۳ و همکاران (۲۰۰۷) و اونو^۴ (۱۹۹۸) می‌پردازد. اصل ربطی صریح (ERP)، به صورت زیر است:

$$\psi \rightarrow \phi \text{ یک قضیه است، تنها اگر } \phi \text{ و } \psi \text{ صریحاً دارای یک متغیر گزاره‌ای مشترک باشند، یا } \sim \psi \text{ و } \phi \text{ قضیه باشند}$$

و قید «صریحاً» در این اصل، اصولاً تضمین‌گر داشتن حداقل یک متغیر مشترک بین مقدم و تالی در قضایای شرطی است (و حتی می‌توان گفت به کار بردن این قید در این تعریف زاید است، منتها برای تمایز این اصل از اصل تلویح قوی که جلوتر خواهد آمد، به کار رفته است).

برآیند نهایی مطالعات یانگ، دو اصل ربطی جدید است (یانگ، ۲۰۱۵b):
اصل ربطی قوی جدید ($NSRP$):

$$\psi \rightarrow \phi \text{ یک قضیه است، اگر } \phi \text{ و } \psi \text{ صریحاً یا با تلویح قوی دارای یک متغیر گزاره‌ای مشترک باشند.}$$

اصل ربطی ضعیف جدید ($NWRP$):

$$\psi \rightarrow \phi \text{ یک قضیه است، اگر یا } \phi \text{ و } \psi \text{ صریحاً یا با تلویح قوی دارای یک متغیر گزاره‌ای مشترک باشند، یا } \phi \sim \psi \text{ قضیه باشند.}$$

و «تلویح قوی» در تعاریف فوق به این معناست که (یانگ، ۲۰۱۳، ۷۸۰):

(۱) ϕ و ψ با تلویح قوی یک متغیر گزاره‌ای به معنای به کار رفته در $NSRP$ را به اشتراک بگذارند.

(۲) ثابت یا ثوابت گزاره‌ای در ϕ و ψ ، قویاً در فرازبان تعریف‌پذیر باشند.

و «تعریف‌پذیری قوی یک ثابت در فرازبان» در یک نظام منطقی L به این معناست که در فرازبان قابل تعریف باشد، ولی در زبان شی‌ای آن منطق قابل تعریف نباشد. برای مثال، t و f در R^t و T و F در R^T تعریف‌پذیر قوی در فرازبان هستند.

^۱ البته سابقه این ایده به بیل و رستال در کتاب *تکثرگرایی منطقی* (۲۰۰۰) بر می‌گردد که بر مبنای نظر آن‌ها، شرطی $\phi \rightarrow F$ واجد ربط و اشتراک متغیر بین مقدم و تالی است؛ منتها بیل و رستال صرفاً پیشنهاد دهنده‌ی این ایده بودند و این یانگ بود که برای اولین بار این ایده را (برای R و RM و توسیع هایشان) عملی نمود: Beall, J. C. & Restall, G. (2006) *Logical pluralism* Oxford: Oxford University Press

^۲ The Explicit Relevance Principle

^۳ Petr Cintula

^۴ Hiroakira Ono

^۵ Strong implicitly

^۶ Strongly meta-definable

توضیح مطلب آن که، ثابت‌های f و T را می‌توان به ترتیب به صورت $\neg t$ در R^t و $\neg F$ در R^T و بالعکس تعریف کرد. منتها این ثوابت به وسیله ثوابت گزاره ای t و F تعریف می‌شوند و بنابراین ثابت(ها) در چنین سیستم‌هایی قابل حذف نیست (R با ثابت t در واقع همان R با ثابت‌های t و f است). بنابراین یانگ به این گونه ثوابت عنوان «تعریف‌پذیر قوی در فرازبان» اطلاق می‌کند (یانگ، ۲۰۱۲).

منطق ربط R بر ربط ساده گزاره‌ای تمرکز دارد، و هدف اصلی توسعه نسخه‌های گوناگون منطق R ، سیستمی است که دقیقاً اصول مورد نیاز برای حفظ معیار ربط‌نگهداری و به اشتراک گذاری متغیر را در بر داشته باشد و در عین حال، تا حد ممکن به قوانین منطق کلاسیک نزدیک بماند. با این معیارهای جدید ارائه شده توسط یانگ، هر سه نسخه منطق ربط R و نیز هر سه نسخه منطق RM و نیز سیستم‌های ربطی با ثوابت گزاره‌ای منطق ربط محسوب می‌شوند. در این مقاله نیز معیارهای ربطی یانگ به سبب رفع مشکلات معیارهای قبلی و جامعیت و مانعیت، به عنوان معیارهای ربطی بودن یک منطق در نظر گرفته می‌شود (و بنابراین بر خلاف بسیاری از آثار قبلی، برای مثال منطقی مانند RM یک منطق ربط (و نه نیمه‌ربطی) است).

۲-۲. ربط‌نگهداری و قضیه استنتاج

ربط‌نگهداری و قضیه استنتاج دو مفهوم بنیادین در منطق هستند که نقش کلیدی در شکل‌گیری نظریه استدلال و نظام‌های اثبات ایفا می‌کنند. به طور خلاصه، منطق ربط با معرفی معیار ربط‌نگهداری، شرط ارتباط موضوعی را به استلزام اضافه می‌کند و به این ترتیب، قضیه استنتاج کلاسیک را به چالش می‌کشد و نیازمند یک فرمول‌بندی ظریف‌تر می‌شود تا بتواند به طور همزمان هم خاصیت استنتاج شرطی و هم خاصیت ربط‌نگهداری را حفظ کند.

ربط‌نگهداری، هم بین مقدم و تالی در استلزامات و هم بین مقدمات و نتیجه در استدلال‌ها به ویژه در منطق ربط حائز اهمیت است، و هدف اصلی منطق‌های ربط، لحاظ کردن ربط هم در رابطه استلزام^۱ و هم در رابطه انتاج^۲ آیین گزاره‌ها است. مفهوم انتاج اولین بار توسط مور توسعه یافت: « p مستلزم q است» یعنی « q از p استنتاج‌پذیر است». (مور^۳، ۱۹۹۲، ۲۹۱): بنابراین هرگاه « $\vdash$ » رابطه استنتاج‌پذیری را بازنمایی کند، شرط زیر، منطق‌های دارای انتاج را مشخص خواهد نمود:

«اگر $A \vdash B$ ، آن‌گاه « A منتج به B می‌شود» قضیه‌ای از آن منطق خواهد بود.» (قضیه/استنتاج تک‌مقدمه‌ای)

از جهتی، استلزام منطقاً ضعیف‌تر از انتاج است، و بنابراین این رابطه برای استلزام هم برقرار خواهد بود.

قضیه استنتاج نیز در منطق ربط یکی از موضوعات مهم و پیچیده است، زیرا تلاش برای حفظ خاصیت ربط‌نگهداری، صورت استاندارد این قضیه را با چالش مواجه می‌کند. صورت استاندارد قضیه استنتاج به صورت زیر است (مرز و مایر، ۲۰۰۱، ۲۸۴):

«اگر $A_1, \dots, A_n, A \vdash B$ ، آن‌گاه $A_1, \dots, A_n \vdash A \rightarrow B$ »

در منطق ربط، با تغییر معنای اعتبار و تعریف ادات معنایی، قضیه استنتاج به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\vdots A_1, \dots, A_n, A \vdash B}{\vdots A_1, \dots, A_n \vdash A \rightarrow B}$$

$$\vdots A_1, \dots, A_n \vdash A \rightarrow B$$

با این تعریف از اعتبار، بسیاری از پارادوکس‌های استلزام مادی و به ویژه EFQ و EQT نامعتبرند.

البته هم‌ارزی استنتاج در سیستم‌های منطق ربط قوی همچون E و R معنای دیگری دارد؛ در واقع در منطق‌های ربط قوی، با افزودن محدودیت‌هایی یا با تغییراتی در ساختار اثبات، نسخه‌های اصلاح‌شده‌ای از قضیه استنتاج را می‌پذیرند تا تضمین کنند

¹ Implication

² Entailment

³ Moore

که خاصیت ربطانگه‌داری نقض نشود. (برای نمونه، رک: دان و رستال، ۲۰۰۲، ۱۹-۲۱). این نسخه‌ها اغلب نیازمند ردیابی دقیق‌تر مفروضاتی هستند که یک نتیجه به آن‌ها وابسته است، که این کار معمولاً از طریق مثلاً سیستم‌های حساب رشته‌های برچسبی و یا نمایش انجام شده است.

فهم اهمیت قضیه استنتاج در گرو فهم مفهوم *استنتاج‌پذیری ربطی* است. در نظریه برهان و سیستم‌های حساب رشته‌ای منطق‌های ربط، به یک شیوه غالباً معنایی^۱ از مقدمات و رابطه آن‌ها با نتیجه بحث می‌شود. یک رشته (یا به اصلاح ربطی، یک توالی منطقی^۲ ساختاری با صورت $A_1, \dots, A_n \vdash B$ است، و یک حساب رشته (یا «حساب توالی منطقی» یا «سیستم گنتزنی») منطقی برای «استنتاج رشته‌ها از رشته‌ها» است. به عنوان مثال، قاعده ساختاری تضعیف که در منطق شهودی و کلاسیک برقرار است، در منطق ربط نامعتبر است:

$$B \vdash C \Rightarrow A, B \vdash C \quad (\text{در کلاسیک و شهودی})$$

در منطق کلاسیک و شهودی، «،» ساختاری، نشانگر عطف مصداقی (∧) است.

دان (۱۹۷۳) و مینتز (۱۹۷۶) ادات ساختاری «:» را برای عطف مصداقی به کار برده و قائل به این هستند که تضعیف برای «،» برقرار نیست، ولی برای «:» برقرار است. بنابراین داریم:

$$B \vdash C \not\Rightarrow A, B \vdash C$$

$$B \vdash C \Rightarrow A : B \vdash C \Rightarrow A \wedge B \vdash C$$

از نظر منطق‌دانان ربط $A, B \vdash C$ و $A : B \vdash C$ معادل نیستند (رد فهم عطف مصداقی از «،» در عوض، در منطق ربط، داریم: (معادل بودن دو طرف استدلال زیر)

$$A_1, \dots, A_n \vdash B$$

$$\vdash A_1 \rightarrow (\dots (A_n \rightarrow B) \dots)$$

ولی $\vdash A_1 \rightarrow (\dots (A_n \rightarrow B) \dots)$ معادل $\vdash (A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$ نیست.

منطق‌دانان ربط عطف معنایی (۵) (فیوژن) را که اداتی غیرتابع ارزشی است معرفی می‌کنند (چرچ، ۱۹۵۱). این ادات، منطبق بر عمل باقیماندگی^۳ در وارینه‌های جبری ربطی است:

$$A \circ B \vdash C \Leftrightarrow A \vdash B \rightarrow C$$

و ۵ اداتی است که باید قضیه استنتاج را صدق‌پذیر سازد.

از منظر مرز و مایر، منطقی ربطی است که ۳ شرط زیر را برآورده سازد (مرز و مایر، ۲۰۰۱، ۲۸۶):

۱. جلوگیری از پارادوکس‌های استلزام مادی و اتخاذ شیوه‌ای برای ارتباط با تناقضات و دیگر امور ناممکن به نحو غیربی‌مایه
۲. برآورده ساختن شرط اشتراک‌گذاری متغیر
۳. داشتن یک رابطه استنتاج‌پذیری که تمام مقدمات در یک استنتاج معتبر قابلیت استفاده در آن استنتاج را داشته باشند و نیز برآورده ساختن قضیه استنتاج.

^۱ Intensional

^۲ رستال در پاورقی فصل اول کتاب منطق‌های زیر ساختی می‌گوید: اصطلاح *consecution* مأخوذ از اندر سون و بلنپ است آن‌ها به دلایلی از این واژه به جای واژه رایج‌تر «رشته» استفاده کردند زیرا رشته لیست کردن مقدمات و نتایج است، اما در *consecution* در واقع مقدمات را با همدیگر به شیوه‌ای ساخت‌مندتر نسبت به لیست کردن صرف دسته بندی می‌کنیم (رستال، ۲۰۰۰، فصل اول)

^۳ Residuaion

اندرسون و بلنپ نشان دادند که منطق R نسبت به معیار ربطانگه‌داری صحیح و تمام است. یعنی، استلزام $A \rightarrow B$ یک قضیه در R است، اگر و تنها اگر A و B دارای متغیر گزاره‌ای مشترک باشند و شرایط معناشناسی منطبق بر سمانتیک راوتلی-میر را برآورده کنند.

۳. نظریه برهان منطق FR

نظریه برهان یکی از چهار شاخه اصلی منطق ریاضی^۱ و یکی از رویکردهای نحوی^۲ در معرفی و بسط منطق‌های فرمال است. در نظریه برهان، براهین و اثبات‌ها به عنوان یک شیء صوری در نظر گرفته شده و سهولت تجزیه و تحلیل‌های فرمال و اثبات قضایا و استدلال‌های سیستم‌ها از مزایای این رویکرد است.

در یک تقسیم‌بندی، نظریه برهان را می‌توان به چهار نوع «اصل موضوعی»، «ساختاری»، «محاسباتی» و «نظریه نوع ساختی» تقسیم‌بندی نمود (نگری و فون پلاتو؛^۳ ۲۰۰۱، xi-xii). در زیر توضیح مختصری در مورد دو شیوه مورد استفاده در این مقاله، یعنی اصل موضوعی و ساختاری داده می‌شود:

۱. «نظریه برهان اصل موضوعی»، راهکاری برای اثبات صوری قضایا و استدلال‌های نظام‌های منطقی است و معمولاً از چند اصل موضوع و یک یا چند قاعده تشکیل شده است. برای مثال، دیوید هیلبرت از جمله پیشگامان استفاده از این شیوه در منطق ریاضی بود و از آن برای بررسی و مطالعه سازگاری، تمامیت و استقلال درونی نظام‌های منطقی استفاده نمود. از جمله نقایص این شیوه، نبود روشی نظام‌مند برای یافتن نمونه‌جانشین‌هایی از اصول موضوعه که در اثبات‌ها کارساز باشند، است.

۲. در «نظریه برهان ساختاری»، به بررسی ساختارها و ویژگی‌های برهان به عنوان یک شیء صوری پرداخته می‌شود. پایه‌گذار این شیوه، گرهارد گنتزن^۴ (دهه ۱۹۳۰) بوده است. گنتزن در رساله دکتری خود تحت عنوان «پژوهش‌هایی بر روی استنتاج منطقی»^۵ دو نوع فرمول‌بندی از نظام‌های نحوی منطقی ارائه داد: «استنتاج طبیعی» و «حساب رشته‌ها»؛ وی اهتمام اصلی خود را بر حساب رشته‌ها گذاشت. از نظر وی، براهین قابل تبدیل به یک شکل فاقد برش^۶ هستند و بر اساس این صورت از برهان، می‌توان نتایج کلی راجع به برهان و از جمله سازگاری سیستم قواعد را به دست آورد. هم‌زمانی کشف حساب رشته‌های گنتزن با قضیه ناتمامیت گودل (که اصول شناخته شده برهان، برای استنتاج تمام حساب کافی نیست)، منجر به این شد که مطالعات نظریه برهانی گنتزن منتهی به «نظریه برهان ترتیبی»^۸ گردید که وظیفه اصلی آن، سنجش قدرت استنتاجی سیستم‌های فرمال با اصول نامتناهی برهان بود. حساب رشته‌های ساختاری یکی از شاخه‌های منطق است که به مطالعه ساختار و ویژگی‌های براهین ریاضیاتی و منطقی می‌پردازد. با حساب رشته‌ها بهتر از روش اصل موضوعی می‌توان ماهیت استنتاج را نشان داد. در نظریه برهان‌های ساختاری (استنتاج طبیعی و حساب رشته‌ای)، علاوه بر قضایا، بیشتر توجه و تأکید بر استنتاج است.

^۱ شاخه‌های اصلی منطق ریاضی عبارتند از: نظریه مجموعه‌ها، نظریه برهان، نظریه مدل، و نظریه بازگشت

^۲ syntactical

^۳ Sara Negri & Jon Von Plato

^۴ Structural proof theory

^۵ Gerhard Gentzen

^۶ Untersuchungen über das logische Schließen

^۷ Cut-free

^۸ Ordinal proof theory

اولین نظام‌های ساختاری استنتاج طبیعی برای منطق‌های ربط، توسط اندرسون و بلنپ ارائه شد. ردّ پای اولین کارها در زمینه حساب رشته‌های منطق ربط را نیز در مقاله **بلنپ و والیس (۱۹۶۱)** و حتی قبل‌تر از آن در مقاله **کریپکی (۱۹۵۹)** می‌توان یافت. حساب‌های رشته‌ای به سبک گنتزن در منطق ربط را می‌توان با حذف قاعده ساختاری تضعیف که اجازه می‌دهد فرمول‌های دلخواه در سمت راست یا چپ رشته‌ها وارد شوند، و نیز اعمال تغییراتی متناظر در زبان و قواعد منطقی ادات‌ها در حساب رشته‌های کلاسیک گنتزن، به دست آورد.

در زمینه منطق‌های فازی نیز حساب رشته‌ها و نیز حساب‌های ابررشته‌ای^۱ ساختاری متعددی ارائه شده است. برای مثال، از جمله از مهم‌ترین کارها در این زمینه حساب رشته‌های منطق فازی شهودی مرتبه اول IF (نزدیک به منطق فازی مرتبه اول G) است که تاکیوتی و تیتانی آن را با افزودن شش اصل موضوع و قاعده چگالیت به حساب رشته‌های شهودی مرتبه اول به دست آوردند. پس از آن **هورن (۱۹۶۹)** و نیز **تاکانو (۱۹۸۷)** زاید بودن اصل چگالیت را نشان دادند، زیرا چنین نیست که هر مجموعه ارزش صدق با ترتیب خطی، چگالاً مرتب باشد، تاکانو پیشنهاد امکان حذف نحوی قاعده چگالیت را مطرح ساخت. باز و **زاخ (۲۰۰۰)** با ارائه حساب ابررشته‌ها برای منطق IF به این پیشنهاد تاکانو تحقق بخشیدند. ضعیف‌ترین منطق فازی شناسایی شده تا کنون، منطق زیرساختاری نیمه‌خطی SL^l معرفی شده در مقاله **سینتولا و همکاران (۲۰۱۴)** می‌باشد. هم برای این منطق و هم منطق فازی بالاتر آن، یعنی FL_e ، حساب رشته‌هایی معرفی شده است.

در ادامه و در زیربخش نظریه برهان حساب رشته‌ای برای منطق‌های فازی ربطی^۲، به بررسی نزدیک‌ترین سیستم‌های حساب رشته‌ای و ابررشته‌ای خطی، ربطی و فازی به FR و نیز UL و نیز حساب‌های ابررشته‌ای این دو سیستم خواهیم پرداخت.

۳-۲-۱. نظریه برهان اصل موضوعی

منطق فازی ربطی FR یکی از بی‌نهایت ناشمارا توسیع‌های پیش‌خطی بین R تا RM است که با افزودن اصل خطیت به منطق R به دست می‌آید. همان‌طور که بالاتر ذکر شد، منطق R دارای حداقل سه نسخه است ($R^0 < R^t < R^T$) که از این میان با برگزیدن معیارهای ربطیت یانگ و نیز اصل به اشتراک گذاری متغیر ...، نسخه R^t مرجح خواهد بود. بنابراین به طور خاص در این مقاله وقتی سخن از FR می‌آید، مقصود نسخه FR^t است که واجد ثوابت t و f و فاقد ثوابت T و F می‌باشد. با در نظر گرفتن زبان صوری و سیستم استنتاجی R^t در بخش ۱-۱ این مقاله، منطق FR^t با افزودن اصل پیش خطیت^۴ (PRL) یا خطیت (Lin) به منطق R^t به دست می‌آید (یانگ، ۲۰۱۵، ب، ۴۷۳):

$$FR^t: R^t + (\phi \rightarrow \psi)_t \vee (\psi \rightarrow \phi)_t \text{ (Lin)}$$

^۱ داود حسینی از معادل «فرارشته» برای واژه‌ی Hypersequent استفاده کرده است (حسینی، ۱۴۰۳، ۳۳۳) حساب‌های ابررشته‌ای تعمیمی طبیعی از حساب‌های رشته‌ای استاندارد گنتزنی هستند اولین بار توسط **آورون (۱۹۸۷)** و **پاتینجر (۱۹۸۳)** معرفی شدند

^۲ جهت آشنایی با ایده‌های نخستین و توسعه‌ی منطق‌های فازی ربطی، برای نمونه به این منابع مراجعه شود: **پریست، ۲۰۰۲؛ چنگ، ۲۰۰۲، میرصانعی، ۱۳۹۰، متکالف و مونتاگنا، ۲۰۰۷، پریست، ۲۰۰۸، یانگ ۲۰۰۹، یانگ ۲۰۱۵ ب و میرصانعی، ۲۰۲۶**

^۳ فلاحی در مقاله «دو توسیع خطی پیش جدولی از منطق ربط R»، نام LR را با نظر به توسیع اصل موضوعی منطق ربط R با اصل خطیت بر این منطق نهاده است (**فلاحی، ۲۰۲۱، ۱۵۴**) و در مقاله مشترک با رافتری (Rafferty) نشان داده است که این منطق (چه با و چه بدون ثوابت آکرمان (ثابت t یا نقیض آن، f))، تعداد بی‌نهایت ناشمارا توسیع پیش جدولی دارد (**فلاحی و رافتری، ۲۰۲۴، ۹۶۷**) ولی از آن جایی که این منطق همان منطقی است که در ادبیات منطق فازی ربطی، برای اولین بار در مقاله ۲۰۰۷ متکالف و مونتاگنا حساب ابررشته‌ای آن معرفی شده (**متکالف و مونتاگنا، ۲۰۰۷، ۸۳۷**) و سپس یانگ در مقاله ۲۰۱۵ سیستم اصل موضوعی آن را ارائه و نام FR را بر آن نهاده (**یانگ، ۲۰۱۵، ۴۷۳**)، و با توجه به عرف ترجیح اولین نام‌گذاری در پژوهش، در این مقاله نام FR برای این منطق در نظر گرفته می‌شود

^۴ Prelinearity axiom

که $(\phi \rightarrow \psi)_t$ کوتاه‌نوشت $((\phi \rightarrow \psi) \wedge t)$ می‌باشد $(A_t =_{\text{df}} (A \wedge t))$ و بنابراین، صورت معادل اصل پیش‌خطیت چنین است (متکالف و مونتگانا، ۲۰۰۷، ۸۳۴):

$$((\phi \rightarrow \psi) \wedge t) \vee ((\psi \rightarrow \phi) \wedge t)$$

متکالف و مونتگانا نیز در مقاله ۲۰۰۷، با افزودن اصل پیش‌خطیت به منطق MAILL، سیستم اصل موضوعی هیلبرتی برای منطق UL ارائه می‌دهند که یک منطق فازی ربطی پایه در این مقاله به حساب می‌آید. آن‌ها همچنین با افزودن اصل نقض رفت و برگشتی (INV: $\neg\neg\phi \rightarrow \phi$) به منطق فازی تک‌نرم UL، منطق IUL را معرفی می‌کنند که با افزودن اصل زیر، یک نسخه فازی از منطق ربط R به دست می‌آید (متکالف و مونتگانا، ۲۰۰۷، ۸۳۷):

$$\text{FR: IUL} + \phi \rightarrow (\phi \odot \phi)$$

البته متکالف و مونتگانا به این مطلب هم اشاره می‌کنند که همیشه این‌گونه نیست که توسیع منطق‌های زیرساختی با اصل پیش‌خطیت (PRL) به فازی شدن آن منطق و ابتدای جبرهای آن‌ها بر بازه بسته $[0,1]$ گردد (متکالف و مونتگانا، ۲۰۰۷، ۸۳۷).

منطق‌دان هلندی، لوخورست^۳ نیز در فصل هشتم مجموعه مقالات مربع تقابل: سنگ بنای اندیشه (مطالعاتی در منطق جهانی)، یک نسخه فازی از منطق ربط اندرسون معرفی می‌کند که با افزودن اصل خطیت به منطق LR (منطق ربط R بدون توزیع‌پذیری) به دست می‌آید و آن را FR می‌نامد. توضیح مطلب آن‌که او اصل موضوع‌بندی منطق R را مبتنی بر مقالات ۱۹۷۵ و ۱۹۹۲ اندرسون و بلنپ ارائه می‌دهد که شامل ۱۵ اصل موضوع، دو قاعده و تعدادی تعریف است (لوخورست، ۲۰۱۷، ۳۱۶). سپس منطق LR (منطق ربط R بدون توزیع‌پذیری) را با حذف اصل زیر از منطق R به دست می‌آورد:

$$(A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee C)$$

و با افزودن اصل خطیت به LR نسخه فازی منطق ربط R را معرفی می‌کند. ارجاع او در معرفی و نام‌گذاری این منطق به مقالات متکالف و مونتگانا ۲۰۰۷ و یانگ ۲۰۱۲، ۲۰۱۴ و ۲۰۱۵ است (لوخورست، ۲۰۱۷، ۳۲۱). اما آیا این منطق طبق ارجاعی که او داشته همان منطق FR یانگ و نیز همان منطق فازی ربطی توسعه منطق R معرفی شده توسط متکالف و یانگ است؟ در این بخش از منظری اصل موضوعی درستی این ادعای تلویحی نشان داده می‌شود.

لوخورست، اثبات می‌کند که $(A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee C)$ قضیه FR است و بنابراین FR یک منطق فازی ربطی با توزیع‌پذیری است و توسیعی از منطق R خواهد بود (در اینجا اثبات بر مبنای تقریر سیستم اصل موضوعی ارائه شده در بخش ۱-۱ و ۳-۲-۱ برای منطق‌های LR و FR ارائه می‌شود):

- | | |
|--|---------|
| 1. $\vdash_{\text{LR}} (B \rightarrow C)_t \rightarrow (B \rightarrow C)$ | A2 |
| 2. $\vdash_{\text{LR}} (B \rightarrow C)_t \rightarrow t$ | A2 |
| 3. $\vdash_{\text{LR}} t \rightarrow (C \rightarrow C)$ | A1, A14 |
| 4. $\vdash_{\text{LR}} (B \rightarrow C)_t \rightarrow (C \rightarrow C)$ | 2,3, A7 |
| 5. $\vdash_{\text{LR}} (B \rightarrow C)_t \rightarrow ((B \vee C) \rightarrow C)$ | 1,4, A5 |

^۱ Multiplicative additive intuitionistic linear logic. سیستم اصل موضوعی MAILL در مقاله ۲۰۰۷ متکالف و مونتگانا ارائه شده است

(متکالف و مونتگانا، ۲۰۰۷، ۸۳۶)

^۲ Involutive Uninorm Logic

^۳ Gert-Jan C Lokhorst

6. $\vdash_{LR} (B \rightarrow C)_t \rightarrow ((A \wedge (B \vee C)) \rightarrow C)$	5, A2
7. $\vdash_{LR} (B \rightarrow C)_t \rightarrow ((A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee C))$	6, A4
8. $\vdash_{LR} (C \rightarrow B)_t \rightarrow t$	A2
9. $\vdash_{LR} t \rightarrow (B \rightarrow B)$	A1, A14
10. $\vdash_{LR} (C \rightarrow B)_t \rightarrow (B \rightarrow B)$	8,9, A7
11. $\vdash_{LR} (C \rightarrow B)_t \rightarrow (C \rightarrow B)$	A2
12. $\vdash_{LR} (C \rightarrow B)_t \rightarrow ((B \vee C) \rightarrow B)$	1,4, A5
13. $\vdash_{LR} (C \rightarrow B)_t \rightarrow ((A \wedge (B \vee C)) \rightarrow (A \wedge B))$	12, A7
14. $\vdash_{LR} (B \rightarrow C)_t \rightarrow ((A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee C))$	13, A4
15. $\vdash_{LR} ((B \rightarrow C)_t \vee (C \rightarrow B)_t) \rightarrow ((A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee C))$	7,14, A5
16. $\vdash_{FR} (B \rightarrow C)_t \vee (C \rightarrow B)_t$	PLt
17. $\vdash_{FR} (A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee C)$	MP (15,16)

لوخورست همچنین با ترسیم جدول زیر، بعضی از ویژگی‌های اثبات شده منطق FR و همسایه‌های آن را تا زمان انتشار مقاله خود نشان داده است (لوخورست، ۲۰۱۷، ۳۲۲):

جدول ۱: منطق FR و همسایه‌های آن

منطق	تعریف	آیا ربطی است؟	آیا فازی است؟	آیا تصمیم‌پذیر است؟
RM	$R + A \rightarrow (A \rightarrow A)$	خیر	بله	بله ^۱
FR	$LR + PL_t$	بله	بله	نامعلوم
R	$LR + (A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee C)$	بله	خیر	خیر ^۲
LR		بله	خیر	بله ^۳

همچنین، اگر رابطه زیرمنطقی را با نماد $(\subset)$ نشان دهیم، خواهیم داشت: $LR \subset R \subset FR \subset RM$ و این بدان معناست که برای مثال هر قضیه در LR، قضیه R، FR و RM هم هست و نه بالعکس.

همچنین اگر به RM^T اصل نقطه ثابت^۴ $(FP) f \leftrightarrow t$ را اضافه کنیم، منطق فازی ربطی IUML^۵ به دست می‌آید که یک منطق تک‌نرم با نقض رفت و برگشتی بوده و توسیع منطق‌های فازی ربطی IUL به حساب می‌آید (یانگ، ۲۰۱۵، ۴۷۲ و ۴۸۴):

$$RM^T \subset IUML$$

IUML اصل ربطی قوی جدید (NSRP) (ر.ک: بخش ۲-۱) را برآورده می‌سازد و بنابراین، بر خلاف RM^T ، یک منطق ربطی قوی با معیار ارائه شده توسط یانگ است (یانگ، ۲۰۱۵، ۴۸۶). همچنین IUML یک نسخه توسعه‌یافته مبتنی بر تک‌نرم از RM^T یا RM مبتنی بر مدل‌های جبری روی بازه بسته $[0,1]$ است، در حالی که خود RM^T ، منطق تک‌نرم فازی

¹ Anderson & Belnap, 1975, Sect 29 3 2

² Anderson, Belnap & Dunn, 1992, Sect 65

³ Anderson, Belnap & Dunn, 1992, Sect 63 3

⁴ Fixed-point (FP) Axiom

⁵ Involutive Uninorm Mingle Logic

به حساب نمی‌آید. توضیح مطلب آن‌که، علیرغم این‌که ماتریس‌های سوگیرا^۱ (به عنوان سمانتیکی برای RM) نیازی به نقطه ثابت ندارند، همین ماتریس‌ها روی بازه بسته $[0,1]$ (مانند سمانتیک $IUML$) دارای نقطه ثابت هستند؛ مانند نقطه ثابت $\frac{1}{2}$ در نقض رفت و برگشتی استاندارد $x - 1$ ، و بنابراین برای اصل موضوع‌بندی منطق‌های واجد این نقض، مانند $IUML$ ، نیاز به اصل نقطه ثابت خواهیم داشت (یانگ، ۲۰۱۵، ب، ۴۸۸؛ متکالف و مونتانا، ۲۰۰۷؛ دان، ۱۹۷۰).^۲

IUL نیز توسیع منطق فازی ربطی تک نرم UL ، و منطق UL نیز توسیع $HPSUL^*$ است که با افزوده شدن اصل WCM به منطق شبه تک نرم $HPSUL$ به دست می‌آید (e کمترین ارزش برگزیده در بازه $[0,1]$ و $\sim$ ادات استلزام قوی می‌باشد) (وانگ، ۲۰۱۸، ۲):

$$WCM: (\phi \sim e) \rightarrow (\phi \rightarrow e)$$

$$HPSUL \subset HPSUL^* \subset UL \subset IUL$$

تمامیت IUL در ۲۰۱۵ توسط وانگ اثبات شد (وانگ، ۲۰۱۵). هرچند این اثبات تا ۲۰۱۸ مورد توجه واقع نشد و پس از آن مطالعات بعدی در این زمینه شکل گرفت.

یانگ سیستم اصل موضوعی زیر را برای نسخه FR^t (به عنوان توسیع فازی حداقلی از R^t) ارائه می‌دهد^۴ (یانگ، ۲۰۱۲) (زبان سیستم را همان زبان R^t در بخش ۱-۱ مقاله حاضر، در نظر بگیرید):

- | | |
|--|--------------------------------|
| A1. $\phi \rightarrow \phi$ | (SI, خوداستلزامی) |
| A2. $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$ | (SF, پسوندگذاری) |
| A3. $(\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$ | (CR, انقباض) |
| A4. $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \leftrightarrow (\psi \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$ | (PM, جایگشت) |
| A5. $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \phi, (\phi \wedge \psi) \rightarrow \psi$ | ($\wedge$ -E, $\wedge$ حذف) |
| A6. $((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\phi \rightarrow (\psi \wedge \chi))$ | ($\wedge$ -I, $\wedge$ معرفی) |
| A7. $\phi \rightarrow (\phi \vee \psi), \psi \rightarrow (\phi \vee \psi)$ | ($\vee$ -I, $\vee$ معرفی) |
| A8. $((\phi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \vee \psi) \rightarrow \chi)$ | ($\vee$ -E, $\vee$ حذف) |
| A9. $(\phi \wedge (\psi \vee \chi)) \rightarrow ((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi))$ | (D, توزیع‌پذیری) |
| A10. $\phi \leftrightarrow (t \rightarrow \phi)$ | (PP, اضافه و حذف) |
| A11. $\sim \sim \phi \rightarrow \phi$ | (DNE, حذف نقض مضاعف) |
| A12. $(\phi \rightarrow \psi)_t \vee (\psi \rightarrow \phi)_t$ | (PL_t, t خطیت (پیش خطیت)) |
| $\phi \rightarrow \psi, \phi \vdash \psi$ | (mp, قاعده وضع مقدم) |
| $\phi, \psi \vdash \phi \wedge \psi$ | (adj, قاعده الحاق) |

^۱ Sugihara matrices

^۲ متکالف و مونتانا (۲۰۰۷) ماتریس‌های سوگیرایی با تعداد فرد مؤلفه را معرفی کردند که دارای نقطه‌ی ثابت متناظر با FP هستند

^۳ Pseudo-Uninorm Logic

^۴ یانگ تصریح می‌کند که اصل $A6$ زاید است؛ اما برای این‌که نشان دهیم که FR^t توسیع R^t است، و با حذف اصل $A12$ ، FR^t به دست می‌آید، به این اصل نیاز داریم زیرا سیستم فاقد هم $A6$ و هم $A12$ ، R^t نیست (اندرسون، بلنپ و دان، ۱۹۷۵؛ اندرسون، بلنپ و دان، ۱۹۹۲)

^۵ Push and Pop

با افزوده شدن ثابت F به زبان FR^t و اصل زیر به اصول موضوعه آن، سیستم اصل موضوعی FR^t به دست می‌آید:

$$A13. F \rightarrow \phi$$

عطف معنایی (۵) در نسخه FR^t دارای خاصیت شرکت‌پذیری است و این قضیه قابل اثبات است (یانگ، ۲۰۱۲ و یانگ،

:۲۰۱۵a)

$$(A \circ (B \circ C)) \rightarrow ((A \circ B) \circ C)$$

از دیگر قضایای قابل اثبات در FR^t ، عبارتند از:

$$(1) \vdash (P \wedge Q) \rightarrow (P \circ Q)$$

$$(2) \vdash (P \circ (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \circ Q) \wedge (P \circ R))$$

$$(3) \vdash (P \circ Q) \rightarrow (Q \circ P)$$

$$(4) \vdash (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow ((P \circ Q) \rightarrow R)$$

$$(5) \vdash P \rightarrow (P \circ P)$$

$$(6) \vdash \sim \sim P \leftrightarrow P$$

$$(7) \vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (\sim Q \rightarrow \sim P)$$

$$(8) \vdash (P \rightarrow (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R))$$

$$(9) \vdash ((P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

به جز قضیه ۲ و قضایای ۸ و ۹ که برای اثبات آن‌ها به اصل خطیت نیاز داریم، بقیه جزو قضایای R^t هستند. در زیر برای نمونه، قضیه آخر، یعنی $((P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$ را اثبات می‌کنیم (برای اثبات ۲ به (اندرسون، بلنپ و دان، ۱۹۷۵؛ یانگ، ۲۰۱۲، ۲۱۰) و برای اثبات ۸ به (یانگ، ۲۰۱۲، ۲۱۱-۲۱۰) مراجعه شود):

$$1. ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R) \quad R^t \text{ قضیه}$$

$$2. ((P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R) \quad A5$$

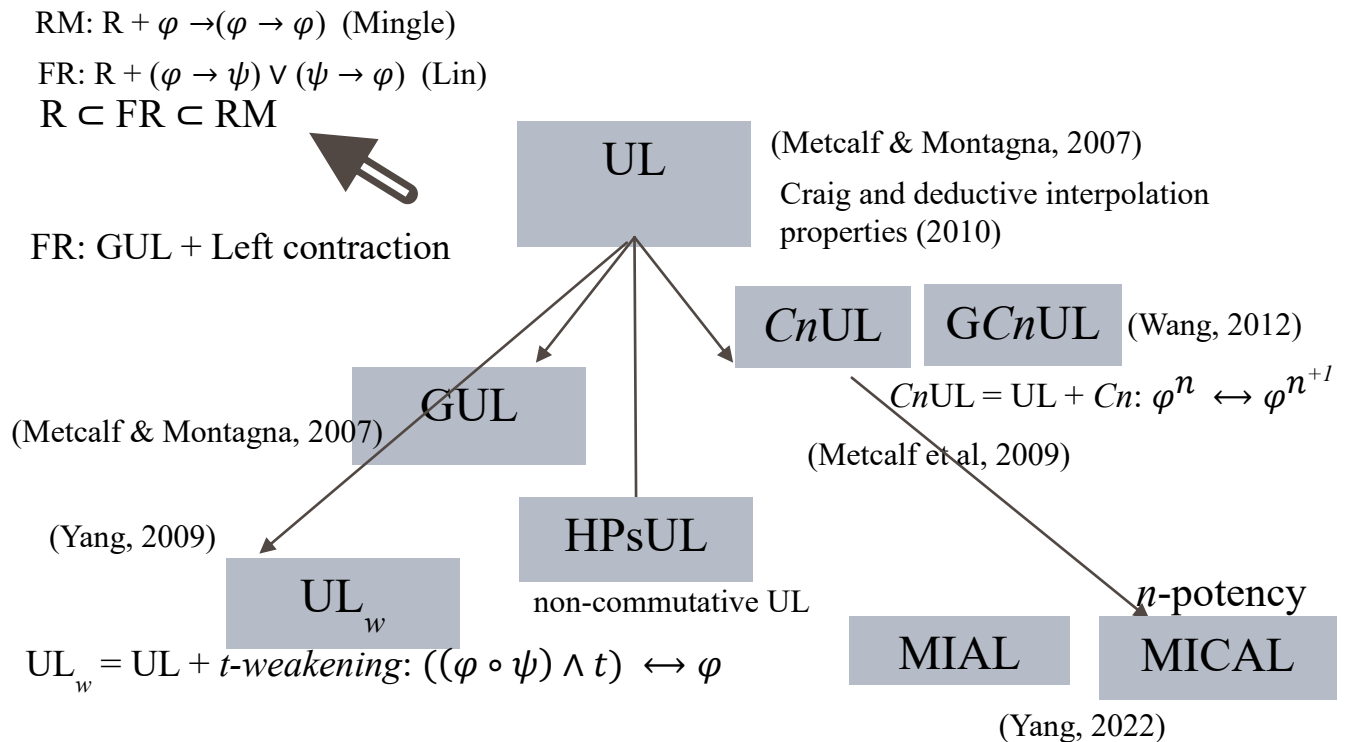
$$3. (((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \vee ((P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R))) \rightarrow (P \rightarrow R) \quad 1, 2, A6, A8$$

$$4. (((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R) \quad 3, A2, A9$$

$$5. (((P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R) \quad 4 \text{ و قضیه } ۸$$

نیست (دان، ۱۹۸۶، R^t)، قضیه $((P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$ این فرمول^۱

نمودار توسعه اصل موضوعی منطق‌های فازی ربطی UL و RM به صورت زیر است:



شکل ۱. نمودار توسعه‌ی منطق‌های فازی ربطی توسعه UL و RM

۳-۲-۲. نظریه برهان حساب رشته‌ای

از آنجایی که سیستم‌های پایه فازی ربطی در این مقاله، منطق FR و نیز UL هستند، و نیز از آنجایی که حساب رشته‌های متعددی برای منطق‌های پایه خطی، فازی و ربطی همسایه با دو منطق FR و UL در مقالات گوناگون طراحی شده است، ابتدا به صورت مختصر ملاحظات نظریه برهانی زیر مطرح می‌گردد (ر.ک.: آمیخته، ۱۳۹۹؛ حسینی، ۱۴۰۳؛ متکالف و مونتگنا، ۲۰۰۷):

۱. منطق فازی FLe: منطق فازی لمبک کامل با قاعده تعویض، با افزودن دو قاعده «جابجایی» و «شرکت‌پذیری» برای عطف معنایی (۵) به منطق لمبک به دست می‌آید.

۲. منطق ربط مثبت فاقد انقباض RW⁺: منطق RW⁺ (یا همان منطق ربطی C⁺ در (پریست، ۲۰۰۸))، با حذف ثوابت از FLe و افزودن اصل DIS به دست می‌آید:

$$[\varphi \wedge (\psi \vee \varphi)] \rightarrow [(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)] \quad ۳.$$

۴. منطق ربط فاقد انقباض RW: هرچند حذف نقض مضاعف در UL قضیه نیست، اما بخش قابل توجهی از قضایای نقضی RW (و از جمله قضایای دموگان)، قضایای UL نیز هستند.

۵. یک حساب رشته تک تالی با حذف برش برای پاره مثبت (فاقد نقض) منطق R (R⁺) مستقلاً توسط دان (۱۹۷۳) و مینتز (۱۹۷۶) پیشنهاد شد، اما خود منطق R هنوز فاقد حساب رشته‌های استاندارد به سبک گنتزن است، و اولین و تنها تلاش‌های

^۱ Full Lambek Logic with exchange

موفق تا کنون برای حساب رشته R، «حساب نمایش» ارائه شده توسط بلنپ (۱۹۸۲) و نسخه متفاوت آن توسط رستال (۱۹۹۸) است. تقریری کامل از این حساب رشته را در کتاب نظریه برهان داود حسینی می‌توان دید (حسینی، ۱۴۰۳، ۳۲۳-۳۲۵).

۶. منطق فازی ربطی RM دارای یک حساب ابررشته‌ای است که نخستین بار توسط آورون (۱۹۸۷) ارائه شد. تقریری از این حساب را در کتاب نظریه برهان می‌توان دید که فاقد برش و نیز تضعیف درونی است (حسینی، ۱۴۰۳، ۳۳۹-۳۴۶).

۷. حساب ابررشته‌ای برای منطق فازی ربطی تک نرم UL، با حذف قواعد ساختاری انقباض و تضعیف از منطق فازی t -نرمی گودل به دست می‌آید. این منطق و حساب ابررشته‌ای آن برای اولین بار توسط متکالف و مونتانا (۲۰۰۷) معرفی شد.

با توجه به عدم وجود نظریه برهان‌های حساب رشته‌ای استاندارد برای نسخه‌های گوناگون منطق R برای به دست آوردن حساب رشته‌ای یا ابررشته‌ای FR، یا باید مسیر حساب رشته‌ای نمایش را پیش بگیریم یا به سراغ توسیع‌های منطق R مانند RM و نیز توسیع‌های منطق تک نرم UL برویم. در این مقاله همچون سایر منطق‌دانان (متکالف و مونتانا، یانگ و ...) مسیر دوم را پیش می‌گیریم.

وانگ در ۲۰۱۲، نشان می‌دهد که توسیعی از UL با نام GUL که متکالف و مونتانا (۲۰۰۷) معرفی کرده بودند، یک منطق فازی ربطی است و به معرفی حساب ابررشته‌ای GUL، و نیز توسیع‌های فازی ربطی آن مانند C_nUL می‌پردازد، و تمامیت استاندارد برای C_nUL را اثبات می‌کند (وانگ، ۲۰۱۲).

حدس نگارندگان مقاله بر این است که اگر با قاعده ساختاری تعامل COM، بتوانیم توزیع‌پذیری (از عطف به فصل و بالعکس) را اثبات کنیم، منطق فازی ربطی معرفی شده در مقاله متکالف و مونتانا (۲۰۰۷) $(IUL + \phi \rightarrow (\phi \odot \phi))$ و نیز یانگ (۲۰۱۵ الف) $(R + PRL)$ همان منطق FR است. همچنین آیا خود FR که از افزودن اصل خطیت به R به دست می‌آید، واجد توزیع‌پذیری است؟

ابتدا به معرفی حساب ابررشته‌ای تک‌تالی فازی ربطی برای GUL می‌پردازیم و سپس حساب ابررشته‌ای چندتالی GIUL را معرفی می‌کنیم. یک ابررشته، یک مجموعه با تکرار (مجموعه مکرر)^۱ متناهی با صورت‌بندی زیر است:

$$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 | \dots | \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$$

که در آن، $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ یک زوج مرتب از مجموعه‌های مکرر متناهی از فرمول‌ها، و یا همان «رشته» به ازای $i=1, \dots, n$ می‌باشد. تعبیر شهودی از $|$ نیز همچون ادات فصل مصداقی می‌باشد و «یا» خوانده می‌شود. اگر به ازای هر $i=1, \dots, n$ حداکثر یک فرمول عضو Δ_i باشد، آن‌گاه حساب ابررشته‌ای «تک‌تالی» می‌باشد و در غیر این صورت، حساب ابررشته‌ای «چندتالی» خواهد بود. همچنین رشته‌های آغازین معمولی و نیز قواعد منطقی و ساختاری با یک «ابررشته کناری»^۲ که با نماد G نشان داده می‌شود، آغاز می‌شوند. همچنین، Γ, Δ نشانگر اجتماع دو مجموعه مکرر Γ و Δ است، و A نشان‌گر مجموعه مکرر تک‌عضوی {A} است.

^۱ Multiset

^۲ Side Hypersequent

رشته‌های آغازین، قواعد ساختاری و منطقی در حساب ابررشته‌ای تک‌تالی منطق فازی ربطی GUL عبارتند از:

- رشته‌های آغازین (قواعد بدون مقدمه):

$$\frac{}{A \Rightarrow A} \text{ (ID)} \quad \frac{}{f \Rightarrow} (f, l) \quad \frac{}{t \Rightarrow} (t, r) \quad \frac{}{\Gamma, \perp \Rightarrow \Delta} (\perp) \quad \frac{}{\Gamma \Rightarrow T, \Delta} (T)$$

- قواعد منطقی:

$$\begin{array}{l} \frac{G \mid \Gamma \Rightarrow \Delta}{G \mid \Gamma, t \Rightarrow \Delta} (t, l) \quad \frac{G \mid \Gamma \Rightarrow \Delta}{G \mid \Gamma \Rightarrow f, \Delta} (f, r) \\ \frac{G \mid \Gamma_1 \Rightarrow A, \Delta_1 \quad G \mid \Gamma_2 \Rightarrow B, \Delta_2}{G \mid \Gamma_1, \Gamma_2, A \Rightarrow B \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2} (\rightarrow, l) \quad \frac{G \mid \Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{G \mid \Gamma \Rightarrow A \Rightarrow B, \Delta} (\rightarrow, r) \\ \frac{G \mid \Gamma, A \Rightarrow \Delta}{G \mid \Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta} (\odot, l) \quad \frac{G \mid \Gamma_1 \Rightarrow A, \Delta_1 \quad G \mid \Gamma_2 \Rightarrow B, \Delta_2}{G \mid \Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow A \odot B, \Delta_1, \Delta_2} (\odot, r) \\ \frac{G \mid \Gamma, A \Rightarrow \Delta}{G \mid \Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta} (\wedge, l)_1 \quad \frac{G \mid \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{G \mid \Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta} (\wedge, l)_2 \\ \frac{G \mid \Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad G \mid \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{G \mid \Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta} (\vee, l) \quad \frac{G \mid \Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad G \mid \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{G \mid \Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta} (\wedge, r) \\ \frac{G \mid \Gamma \Rightarrow A, \Delta}{G \mid \Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta} (\vee, r)_1 \quad \frac{G \mid \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{G \mid \Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta} (\vee, r)_2 \end{array}$$

- قواعد ساختاری: (قواعد انقباض بیرونی^۱، تضعیف بیرونی^۲، برش و تعامل^۳ اُورون)

$$\frac{G \mid \Gamma \Rightarrow \Delta \mid \Gamma \Rightarrow \Delta}{G \mid \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ (EC)} \quad \frac{G}{G \mid \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ (EW)}$$

$$\frac{G \mid \Gamma_1, A \Rightarrow \Delta_1 \quad G \mid \Gamma_2 \Rightarrow A, \Delta_2}{G \mid \Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2} \text{ (CUT)} \quad \frac{G \mid \Gamma_1, \Pi_1 \Rightarrow \Delta \quad G \mid \Gamma_2, \Pi_2 \Rightarrow \Sigma}{G \mid \Gamma_1, \Pi_1 \Rightarrow \Delta \mid \Gamma_2, \Pi_2 \Rightarrow \Sigma} \text{ (COM)}$$

قواعد تضعیف بیرونی (EW) و انقباض بیرونی (EC) برای این حساب زاید هستند، بدین معنا که اگر یک ابررشته G در GUL قابل استنتاج باشد، آن‌گاه حداقل یک رشته $S \in G$ وجود خواهد داشت که بدون اعمال قواعد (EW) و (EC) قابل استنتاج است. همچنین از آن‌جایی که هم رشته‌ها و هم ابررشته‌ها مشتمل بر مجموعه‌های مکرر هستند، نیازی به قاعده ساختاری تعویض^۴ در این حساب نداریم.

اگر حساب چندتالی را مجاز بدانیم و قاعده تعامل (COM) فوق را با قاعده زیر جایگزین کنیم، حساب ابررشته‌ای چندتالی فازی ربطی GIUL به دست می‌آید:

$$\frac{G \mid \Gamma_1, \Pi_1 \Rightarrow \Sigma_1, \Delta_1 \quad G \mid \Gamma_2, \Pi_2 \Rightarrow \Sigma_2, \Delta_2}{G \mid \Gamma_1, \Pi_1 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2 \mid \Gamma_2, \Pi_2 \Rightarrow \Sigma_1, \Sigma_2} \text{ (COM)}$$

متکالف و مونتاگنا همچنین از یک منطق فازی ربطی سخن به میان می‌آوردند که حساب ابررشته‌ای تک‌تالی آن با افزودن قاعده ساختاری تضعیف چپ (CL) به GUL به دست می‌آید و همچنین با افزودن آن به GIUL، حساب ابررشته‌ای چندتالی چندرشته‌ای فازی ربطی به دست می‌آید (متکالف و مونتاگنا، ۲۰۰۷، ۸۷) (برای جلوگیری از خلط سیستم‌ها، در این مقاله، نام این حساب‌های فازی ربطی جدید را به ترتیب RGUL و RGIUL می‌گذاریم):

¹ External Contraction

² External Weakening

³ Communication rule (COM)

⁴ Exchange rule

³ Schütte-Tait style cut-elimination proof

سمانتیک راوتلی-میری برای نسخه فاقد ثوابت منطق R ، یعنی R^0 ، در ۱۹۸۶ توسط مایکل دان ارائه شد، و سمانتیک راوتلی-میری برای دو نسخه قوی‌تر، یعنی منطق‌های ربط R^T و R^t ، در سال ۲۰۱۵ توسط یانگ معرفی شد. سمانتیک از نوع کریپکی برای منطق FR^t در مقالات ۲۰۱۲ و ۲۰۱۹ یانگ ارائه شد. یانگ در مقاله ۲۰۱۹ با توسعه کار خود در مقاله ۲۰۱۲، یک سمانتیک نظریه-مجموعه‌ای از نوع کریپکی برای FR معرفی می‌نماید و صحت و تمامیت ضعیف و قوی FR را نسبت به این سمانتیک با نشان دادن این که قاب استاندارد کریپکیایی FR مرتب خطی است، اثبات می‌کند (یانگ، ۲۰۱۹، ۲۹۸-۲۹۹ و ۳۰۴). یانگ در مقاله ۲۰۲۲، سمانتیک جبری راوتلی میری برای این منطق و نیز نسخه قوی‌تر آن، یعنی FR^T ، و نشان داد که این دو منطق نسبت به این سمانتیک جبری صحیح و تمام هستند (یانگ، ۲۰۲۲، ۳۲۶ و ۳۲۹). البته یانگ تصریح می‌کند که هر دو اثبات تمامیت جبری و نیز راوتلی - میری برای دو منطق FR^t و FR^t ، به صورت غیر مستقیم و با استفاده از تمامیت جبری بوده است. ولی تمامیت مستقیم برای آن‌ها سؤال باز است (یانگ، ۲۰۲۲، ۳۲۹).

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

روش تحقیق در این مقاله، اولاً روش اصل موضوعی بود و در این راستا، نظریات مبنایی تحقیق شرح و بسط داده می‌شود. به این صورت که، ابتدا با رویکردی گزاره‌ای، نظریه برهان‌های اصل موضوعی و حساب رشته‌ای و ابررشته‌ای برای نسخه‌های گوناگون منطق ربط R ، منطق پیش جدولی LR و منطق‌های فازی ربطی RM ، UL و FR و توسیع‌های آن‌ها تقریر و ارائه شد و متناظر با این سیستم‌های اصل موضوعی، سمانتیک‌های جبری و واریته‌های جبری متناظر هر یک مورد بررسی قرار گرفت، و اثبات فراقضای صحت و تمامیت با نظر به این واریته‌ها و ماتریس‌های مرتب خطی برای آن سیستم‌ها مورد بررسی قرار گرفت.

ثانیاً، روش این پژوهش توصیفی - تحلیلی بود، و در این پژوهش به عنوان یک پژوهش نظری و بنیادی، با روش تحلیل منطقی و استفاده از روش‌های محاسبات غیرالگوریتمیک اصل موضوعی و الگوریتمیک حساب رشته‌ای و ابررشته‌ای، و نیز روش‌های جبری، توجیه و اثبات یا ابطال فرضیات پژوهش، یعنی تمامیت یا ناتمامیت سیستم‌های اصل موضوعی و حساب رشته‌ای فازی ربطی سنجیده شد. در این پژوهش با رویکردی پیشینی - قیاسی و با نظر به سازگاری و صحت و تمامیت FR نسبت به سمانتیک راوتلی-میری و نیز سمانتیک‌های جبری و UL نسبت به ماتریس‌های مرتب خطی، و توسیع‌های گزاره‌ای آن‌ها، و نیز با کمک بعضی از نظریات واسطی (از سمانتیک‌های جبری فازی، ربطی و خطی) به اثبات نظریه پژوهش (مجموعه‌ای منسجم از قضایای مرتبط ارائه شده در بخش فرضیات) پرداخته شد.

در این مقاله به صورت موردی و با بررسی آثار جدید در زمینه توسعه‌های فازی منطق R ، و کشف روابط توسیعی بین منطق‌های گوناگون فازی، خطی و ربطی در همسایگی منطق فازی ربطی FR ، نشان داده شد نظام‌های اصل موضوعی و نیز نظریه برهان حساب ابررشته‌ای ارائه شده برای منطق فازی ربطی FR ، نسبت به سمانتیک‌های ارائه شده برای نسخه‌های گوناگون FR ، شامل سمانتیک‌های جبری (نسبت به کلاس تمام زنجیرها، شامل تک‌واره‌های دموورگانی و دارای ترتیب خطی) و سمانتیک‌های راوتلی-میری صحیح و تمام قوی است. البته اثبات تمامیت مستقیم و نیز تصمیم‌پذیری نسخه‌های قوی FR ، یعنی FR^t و FR^t همچنان سؤال باز است و امید است در پژوهش‌های آتی به پاسخ این سؤالات دست پیدا کنیم.

ملاحظات فلسفی بر مبنای نظریه برهان‌های ارائه شده و تقریر شده در این مقاله و نیز بررسی قواعد ساختاری، برای حل پارادوکس‌های ابهام، از جمله ملاحظات فلسفی و کاربست‌های فلسفی این مقاله است، که شرح آن در این مجال نمی‌گنجد و

در مقاله‌ای فلسفی به تفصیل به آن مباحث پرداخته خواهد شد. همچنین توسعه توصیفی منطق فازی ربطی FR و استفاده از آن به عنوان منطقی پایه برای بازنمایی دانش و ساخت گراف‌های دانش و کاربرد این گراف‌های در هوش مصنوعی نمادین، رباتیک و مباحث وب معنایی، و نیز پیاده‌سازی آن در چند هستان‌نگار بزرگ و ساخت افزونه‌های دستیار خبره هوش مصنوعی در دانش‌های مختلف مبتنی بر استنتاج‌گرهای فازی ربطی از دیگر نکات کاربردی این مطالعه بوده است که در مقاله‌ای مجزا به دستاوردهای پژوهشی حاصل از آن مطالعات اشاره خواهد شد.

تشکر و قدردانی

از تمامی زحمات و راهنمایی‌ها و مشاوره‌های علمی جناب آقای دکتر مسعود پورمهدیان، به ویژه در زمینه مباحث مرتبط با نظریه مدل، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

منابع

- آمیخته، عامر. (۱۳۹۹). «منطق موجهات فازی گزاره‌ای: ساختار نحوی، ساختار معنایی و فرامنتق» رساله دکتری، دانشگاه تربیت مدرس.
- حسینی، داود. (۱۴۰۳). نظریه برهان؛ حساب رشته: چهارچوبی برای معنا و منطق، تهران: انتشارات سمت، چاپ اول.
- رید، استیفن. (۱۳۸۵). فلسفه منطق ربط، اسداله فلاحی، قم: انتشارات دانشگاه مفید.
- فلاحی، اسداله. (۱۳۹۱). آشنایی با منطق ربط، تهران: انتشارات مؤسسه پژوهشی حکمت و فلسفه ایران، چاپ اول.
- میرصانعی، سید احمد. (۱۳۹۰). «منطق فازی ربطی: رویکردی گزاره‌ای»، پایان‌نامه کارشناسی/ارشد، دانشگاه تربیت مدرس.
- میرصانعی، سید احمد. (۱۴۰۵). «نظریه برهان برای منطق‌های زیرساختی فازی ربطی غیر -آتری»، پایان‌نامه دکتری، دانشگاه تربیت مدرس.
- نبوی، لطف‌اله. (۱۳۸۸). مبانی منطق فلسفی، چاپ اول، تهران: انتشارات دانشگاه تربیت مدرس.

References

- Amikhteh, A. (2020). Propositional Fuzzy Modal Logic: Syntax, Semantics and Meta-Logic, *PhD Thesis*. Tarbiat Modares University. (In Persian)
- Anderson, A. R., & Belnap, N. D. (1962). The pure calculus of entailment1. *The Journal of Symbolic Logic*, 27(1), 19-52.
- Anderson, A. R., Belnap, N. D., & Dunn, J. M. (1975). *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*, Vol.1, Princeton: Princeton University Press.
- Anderson, A. R., Belnap, N. D., & Dunn, J. M. (1992). *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*, Vol.2, Princeton: Princeton University Press.
- Avron, A. (1987). A constructive analysis of RM. *The Journal of symbolic logic*, 52(4), 939-951.
- Baaz, M., & Zach, R. (2000). Hypersequents and the proof theory of intuitionistic fuzzy logic. In *International Workshop on Computer Science Logic* (187-201). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Beall, J. C., & Restall, G. (2000). Logical pluralism. *Australasian journal of philosophy*, 78(4), 475-493.
- Belnap, N. D., & Wallace, J. R. (1961). A decision procedure for the system.
- Belnap, N. D. (1982). Display logic. *Journal of philosophical logic*, 375-417.
- Cheng, J., & Goto, Y. (2002). "A Strong Relevant Logic Approach to the Calculus of Fuzzy Conditionals". In *Computational Intelligent Systems for Applied Research - 5th International FLINS Conference* (July 2002).
- Church, A. (1951). The Weak Theory of Implication. in *Kontrolliertes Denken. Untersuchungen zum Logikkalkuel und der Logik der Einzelwissenschaften*, Menne-Wilhelmy-Angsil (ed.), 22-37.

- Cintula, P., Horčík, R., & Noguera, C. (2014). The quest for the basic fuzzy logic. In Petr Hájek on *Mathematical Fuzzy Logic* (pp. 245-290). Cham: Springer International Publishing.
- Dunn, J. M. (1970). Algebraic Completeness for R-Mingle and its Extensions. *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 35, 1-13.
- Dunn, J. M. (1973). Gentzen System for Positive Relevant Implication. In *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 38, No.2, 356-357.
- Dunn, J. M. (1976). A Kripke-Style Semantics for R-Mingle Using a Binary Accessibility Relation. *Studia Logica*, Vol. 35, 163-172.
- Dunn, J. M. (1986). Relevance Logic and Entailment. In *Handbook of Philosophical Logic* (vol. III), D. Gabbay and F. Guenther (eds.), Dordrecht: D. Reidel Publ. Co., 117-224.
- Dunn, J. M., & Restall, G. (2002). Relevance logic. In *Handbook of philosophical logic* (pp. 1-128). Dordrecht: Springer Netherlands.
- Dunn, J. M. (2000). Partiality and its dual. *Studia Logica*, 66, 5-40.
- Fallahi, A. (2011). *An Introduction to Relevant Logic*, Tehran: Iranian Institute of Philosophy. (In Persian)
- Fallahi, A. (2021). Two Pretabular Linear Extensions of Relevance Logic R. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, Vol. 31, No.2, 154-179. <https://doi.org/10.1080/11663081.2021.1915687>
- Fallahi, A., & Raftery, J. G. (2024). On Pretabular Extensions of Relevance Logic. *Studia Logica*, Vol. 112, 967-985. <https://doi.org/10.1007/s11225-023-10081-2>
- Hosseini, D. (2024). *Proof Theory: Sequent Calculus: A Framework for Meaning and Logic*, Tehran: SAMT. (In Persian)
- Horn, A. (1969). Logic with truth values in A linearly ordered Heyting algebra¹. *The Journal of Symbolic Logic*, 34(3), 395-408.
- Kripke, S. A. (1959). A completeness theorem in modal logic¹. *The journal of symbolic logic*, 24(1), 1-14.
- Lewis, C. I. (1912). Implication and the Algebra of Logic. *Mind*, Vol. 21, No. 84 (Oct. 1912), 522-531.
- Lewis, C. I. (1917). The issues concerning material implication. *The journal of philosophy, psychology and scientific methods*, 14(13), 350-356.
- Lokhorst, G. J. C. (2017). Fuzzy Eubouliatic Logic: A Fuzzy Version of Anderson's Logic of Prudence. In *The Square of Opposition: A Cornerstone of Thought*, pp. 315-324. Cham: Springer International Publishing.
- Mares, E. D. (2020). Relevance Logic. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Metaphysics Research Lab. Stanford University (Retrieved 14 December 2021).
- Mares, E. D. (2004). "Four-valued" semantics for the relevant logic R. *Journal of Philosophical Logic*, 33, 327-341.
- Mares, E. D., & Meyer, R. K. (2001). Relevant Logics. In *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*, Goble, Lou (ed.), Massachusetts and Oxford: Blackwell Publishers.
- Metcalf, G., & Montagna, F. (2007). Substructural Fuzzy Logics. *Journal of Symbolic Logic*, 72(3), 834-864.
- Meyer, R. K., Giambrone, S., & Brady, R. T. (1984). Where gamma fails. *Studia Logica*, 43(3), 247-256.
- Meyer, R. K., & Routley, R. (1973). Classical relevant logics I. *Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic*, 32, 51-68.
- Mints, G. E. (1976). Cut-Elimination Theorem for Relevant Logics. *Journal of Soviet Mathematics*, 6(4), 422-428.
- Mirsanei, S. A. (2010). Fuzzy Relevant Logic: A Propositional Approach, *MSc Thesis*, Tarbiat Modares University. (In Persian)
- Mirsanei, S. A. (2026). Proof Theory for non-t-norm substructural fuzzy relevant logics, *PhD Thesis*, Tarbiat Modares University. (In Persian)
- Moore, G. E. (1922). *Philosophical studies*, New York: Harcourt. Brace & co.

- Nabavi, L. (2008). *An Introduction to Philosophical Logic*, Tehran: Tarbiat Modares University Press. (In Persian)
- Negri, S., & von Plato, J. (2001). *Substructural Proof Theory*, New York: Cambridge University Press.
- Pottinger, G. (1983). Uniform, cut-free formulations of T, S4 and S5. *Journal of Symbolic Logic*, 48(3), 900.
- Priest, G. (2002). Fuzzy relevant logic. In *Paraconsistency* (261-274), CRC Press.
- Priest, G. (2008). *An introduction to non-classical logic: From if to is*, Cambridge University Press.
- Read, S. (2005). *Relevant Logic*, A. Fallahi (Translator), Oxford: Basil Blackwell. (In Persian)
- Restall, G. (1998). Displaying and deciding substructural logics 1: Logics with contraposition. *Journal of Philosophical Logic*, 27(2), 179-216.
- Restall, G. (2000). *An Introduction to substructural logics*. New York: Routledge.
- Routley, R., & Meyer, R. K. (1972). The semantics of entailment: III. *Journal of philosophical logic*, 192-208.
- Routley, R., Plumwood, V., Meyer, R. K., & Brady, R. T. (1982). *Relevant logics and their rivals*.
- Takano, M. (1987). Another proof of the strong completeness of the intuitionistic fuzzy logic. *Tsukuba journal of mathematics*, 11(1), 101-105.
- Wang, S. M. (2012). Uninorm Logic with the n-Potency Axiom. *Fuzzy Sets and Systems*, 205, 116-126.
- Wang, S. M. (2015). Density Elimination for Semilinear Substructural Logics. *arXiv:109.03472*.
- Wang, S. M. (2018). Logics for Finite UL and IUL-Algebras Are Substructural Fuzzy Logics. *Symmetry*, 10 (755).
- Whitehead, A. N., & Russell, B. (1903). *Principia mathematica* (Vol. I), The University Press.
- Yang, E. (2008) Uninorm Logic: Toward a Fuzzy-Relevance Logic (2). *Korean Journal of Logic*, 11(10), 131-156.
- Yang, E. (2009). Non-Associative Fuzzy-Relevance Logics. *Korean Journal of Logic*, 12(1), 89-110.
- Yang, E. (2012). R. fuzzy R. and Algebraic Kripke-style Semantics. *Korean Journal of Logic*, (15), 207–221.
- Yang, E. (2013). R and Relevance Principle Revisited. *Journal of Philosophical Logic*, (42), 767-782.
- Yang, E. (2014). Algebraic Kripke-style Semantics for Relevance Logics. *Journal of Philosophical Logic*, (43), 803–826.
- Yang, E. (2015a). Routley-Meyer Semantics for R. *Korean Journal of Logic*, (18), 437-456.
- Yang, E. (2015b). Substructural Fuzzy-Relevance Logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, (56), 471-491.
- Yang, E. (2019). R. Fuzzy R. and Set-Theoretic Kripke-style Semantics. *Korean Journal of Logic*, (22), 291-307.
- Yang, E. (2020). Algebraic Relational Semantics for Basic Substructural Logics. *Logique et Analyse*, (252), 415-441.
- Yang, E. (2021). Basic Core Fuzzy Logics and Algebraic Routley-Meyer-style Semantics. *Axioms*, 10(4), 1-16.
- Yang, E. (2022). Fuzzy R Systems and Algebraic Kripke-style Semantics. *Korean Journal of Logic*, 25(3), 313–332.